Information

Aufgabe 1

Ziel: Berechnung von Stammfunktionen mit verschiedenen Methoden

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a. (❤️) $\int \frac{x\,dx}{x^4+3}$

Hinweis: Substituieren Sie $u = x^2$

b. (❤️) $\int \frac{1}{\cosh x}\,dx$

Hinweis: Substituieren Sie $u = e^x$.

c. (❤️) $\int_3^4 x^3 \cos(x^2) dx$

d. $\int \frac{dx}{2\sqrt{e^x - 1}}$

Hinweis: Substituieren Sie $u^2 = e^x - 1$.

e. $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\arcsin\left(\sqrt{1-4x^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}\,dx$

Hinweis: Substituieren Sie $2x = \cos u$.

f. (❤️) $\int \frac{x}{x^3+x^2-x-1} dx$

g. $\int \frac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} dx$

Hinweis: Das Polynom $x^2 + 1$ ist ein Faktor des Nenners.

h. $\int \frac{x+2}{x^4+2x^2}dx$

Weitere Übungen dieser Form finden Sie auch im Integral-Trainer!

Information

Aufgabe 2

Ziel: Anwendung des Integrals zur Flächenberechnung, Umsetzung geometrischer Beschreibung

Bestimmen Sie die Menge aller Parabeln der Form $y = -ax^2 + b, a > 0, b > 0,$ welche mit der x-Achse die Fläche $\frac{4}{3}$ einschliessen.

Information

Aufgabe 3

Ziel: Integrationstechniken üben, Nachweisen von Rekursionsformeln, komplizierter Grenzwert

Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Rekursionsformel für das Integral

$$I_n = \int_1^e \ln(x)^n \mathrm{d}x, \qquad n \geq 0$$

zu finden.

a. (❤️) Berechnen Sie die ersten zwei Integrale I_0 und I_1.
b. Finden Sie eine Rekursionsformel für I_n. Benutzen Sie hierfür partielle Integration.
c. Verwenden Sie die gefundene Rekursionsformel von I_n um I_5 zu berechnen.
d. (⭐) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Hinweis: Es sei $\epsilon > 0$. Benutzen Sie unter anderem

$$I_n = \int_1^{e-\epsilon} \ln(x)^n \mathrm{d}x + \int_{e-\epsilon}^e \ln(x)^n \mathrm{d}x$$

und $\ln(x) < 1$ für alle $x \in [1, e)$ um zu zeigen, dass $\lim_{n\to+\infty} I_n \leq \epsilon$.