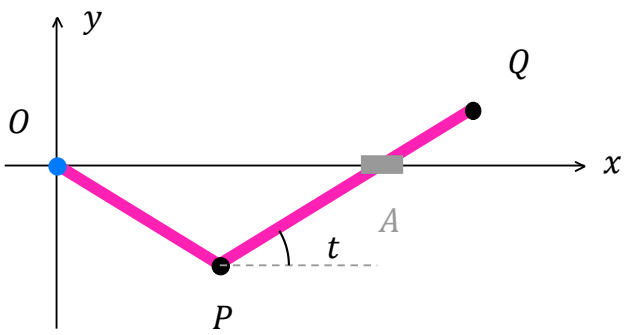
Analysis 1 - Übung 9

Bsp. Roboterarm

Geg.: $OP = PA = r$, $AQ = b$ $\quad r, b > 0$
A gleitet auf der x-Achse.



Ges.: Bahn von Q für $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$.

Wir gehen von nach und dann nach

$$\overrightarrow{OQ} = \quad + \qquad = \left(\quad\right), \qquad = \left(\quad\right)$$

$$\overrightarrow{OQ} = \quad + \quad = \left(\quad\right) + \left(\quad\right) = \left(\quad\right)$$

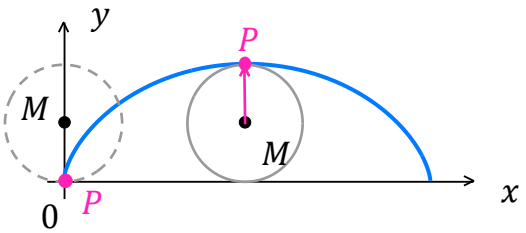
$$Q(t) = \left(\left(\quad + \right)\quad\right)$$

Zykloide: ein Punkt am rollenden Rad

Ohne Rutschen. r: Radradius, t: Drehwinkel.

Geg.: $r = 1$, ein Bogen mit $0 \leq t \leq 2\pi$.

Ges.: Bahn von P



$$\overrightarrow{OP} = \quad + \qquad = \left(\quad\right), \qquad = \left(\quad\right) = \left(\quad\right)$$

$$\overrightarrow{OP} = \quad + \quad = \left(\quad\right) + \left(\quad\right) = \left(\quad\right)$$

$$x =$$
$$y =$$

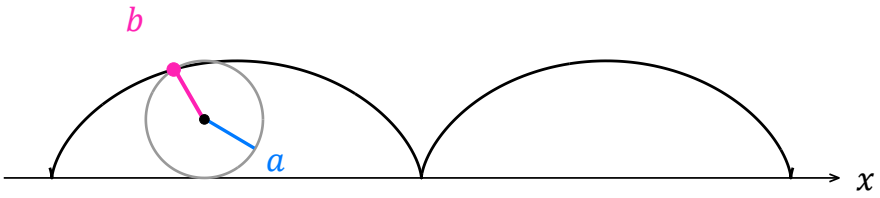
$$\mathrm{P}(t) = \left(\quad\right)$$

Drei Arten der Zykloide

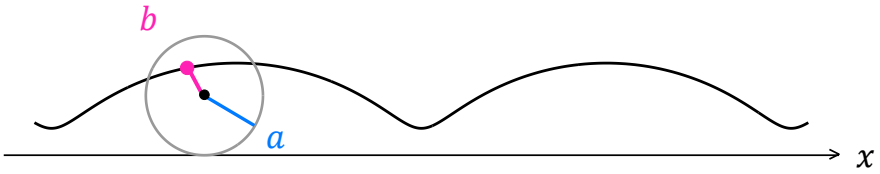
a: Radradius. b: Abstand des Punktes vom Mittelpunkt.

$$x(t) = at - b\sin t, \qquad y(t) = a - b\cos t$$

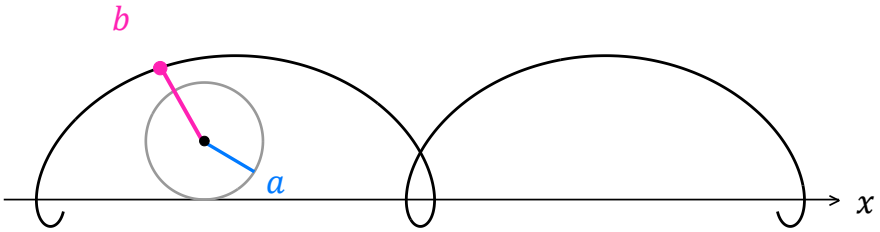
Zykloide b a Spitzen



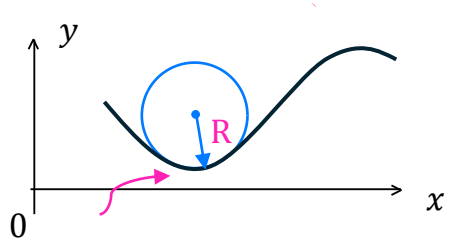
Zykloide b a keine Spitzen



Zykloide b a Schleifen



Krümmung und Krümmungsradius



Ein passender ? bedeutet Krümmung

Für den Radius zusätzlich $k \quad 0$.

Krümmung k(t)

$$k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

Krümmungsradius R(t)

$$R(t) = \frac{1}{k(t)}$$

Krümmungskreis und Evolute

Parametrisierung des des Krümmungskreises

$$r_E(\mathrm{t}) = \begin{pmatrix} x_E(t) \\ y_E(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + R(t)\frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}$$

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

$\bar{n}$ hat Länge 1. Das Vorzeichen von $R(t)$ wählt die

$$x_E = x(t) - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}\dot{y}$$

$$y_E = y(t) + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}\dot{x}$$

Bsp.

Geg.: $\gamma(t) = (2t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

Ges.: $k(t)$, $R(t)$, $k\max(t)$, Evolute und Evolute mit konstantem minimalem Radius

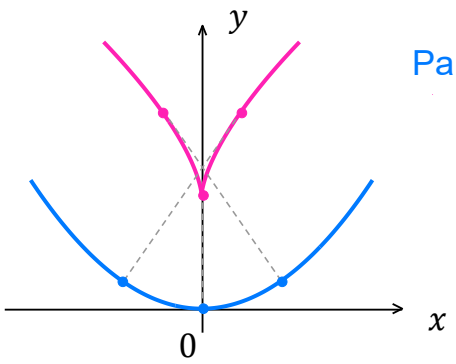
$$\dot{\gamma} = (\quad), \qquad \ddot{\gamma} = (\quad)$$

$$k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{\bullet \quad - \quad \bullet}{(\quad + \quad)^{3/2}} = \frac{\qquad\qquad}{(\qquad)^{3/2}}, \qquad R(t) =$$

$$\dot{k}(t) = 0 = \left(\quad\right)(\qquad)\quad(\quad) = \frac{\qquad\qquad}{} = \quad \Rightarrow \text{bei t} = \quad : k_{max} = \quad , R_{min} =$$

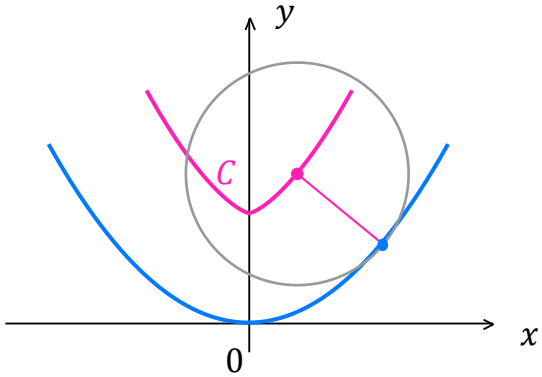
$$x_E = x(t) - \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}\dot{y} = \quad - \frac{+}{\qquad} \bullet \quad = \qquad = x_E(t)$$

$$y_E = y(t) + \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}\dot{x} = \quad + \frac{+}{\qquad} \bullet \quad = \quad + \qquad = y_E(t)$$



Parabel

Jeder Punkt der pinken Kurve gehört zu einem passenden



$$r_E(\text{t}) = \begin{pmatrix} x_E(t) \\ y_E(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + Rmin(t)\frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} \qquad \bar{n} = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_M(t) \\ y_M(t) \end{pmatrix} = (\quad) + \quad (\quad) \frac{\qquad}{}$$

Zusatz:

$$k(x) = \frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}}, \quad R(x) = \frac{1}{k(x)}, \qquad r_E(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} + R(x) \bullet \bar{n}_0(x)$$

$$k(\varphi) = \frac{\rho^2+2(\rho')^2-\rho\rho''}{(\rho^2+(\rho')^2)^{3/2}}, \quad R(\varphi) = \frac{1}{k(\varphi)}, \qquad r_E(\varphi) = \begin{pmatrix} \rho(\varphi) \bullet \cos(\varphi) \\ \rho(\varphi) \bullet \sin(\varphi) \end{pmatrix} + R(\varphi) \bullet \bar{n}_0\,(\varphi)$$

Striche: nach φ ableiten. $\rho^2 + (\rho')^2 > 0$.

Geg.: $\rho(\varphi) = 2 + \cos\varphi$, $\varphi = 0$.

Ges.: Punkt, Krümmung und Radius.

$\rho =$ $\rho' =$ $\rho'' =$

$P = (\ \ )$, $k =$, $R =$

SC 14 (II) Welche Aussage über eine ebene Kurve und ihre Evolute ist richtig?

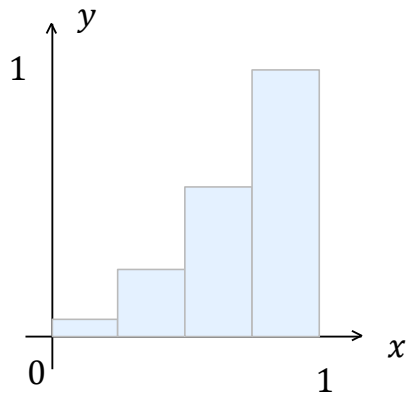
(A) Es gibt keine Kurve, deren Evolute nur aus einem Punkt besteht

(B) Die Kurve und ihre Evolute haben immer einen Schnittpunkt

(C) Der Abstand zwischen Kurve und Evolute ist klein, wenn der Betrag der Kurvenkrümmung gross ist

(D) Die Evolute der Evolute ist immer die ursprüngliche Kurve

Bestimmtes Integral und Riemannsumme



$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

Geg.: $f(x) = x^2$ auf $[0, 1]$, vier Rechtecke,

Ges.: Rechtecke, S_4 und Grenzwert von S_n.

$$S_4 = \left(\quad + \quad + \quad + \quad \right) = \left(\quad + \quad + \quad + \quad \right)$$

$$S_4 = \qquad \lim_{n\to\infty} S_n =$$

Die rechten Rechtecke sind hier etwas zu
Mit immer mehr Rechtecken nähert sich die Summe dem

Integrale: Rechenregeln und Mittelwert

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \int_a^b f\, dx \quad \beta \int_a^b g\, dx$$

$$\int_a^c f\, dx = \int_a^b f\, dx + \int_b^c f\, dx, \quad \int_b^a f\, dx = \quad \int_a^b f\, dx$$

$$f \quad g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \quad \int_a^b g(x)dx \quad (a \quad b)$$

Für stetige f und g

Geg.: $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$, $\int_0^1 1\,dx = \int_1^2 1\,dx = 1$, $0 \le x^2 \le x$ auf $[0,1]$

Ges.: a) $\int_0^1 (2x+1)dx$, b) $\int_0^2 1dx$, c) $\int_1^0 x\,dx$, d) Schranken für $I = \int_0^1 x^2\,dx$

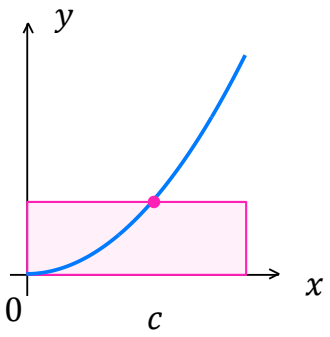
Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\exists c \in [a,b]: \quad f \quad = \quad \int_a^b f(x)\,dx$$

Für stetiges f auf $[a,b]$, $a < b$.

Geg.: $f(x) = x^2$ auf $[0,1]$,Integral $1/3$

Ges.: Mittlere Höhe und passendes c



Hauptsatz und Stammfunktionen

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \implies F'(x) = f(x) \qquad (f \text{ stetig})$$

$$G' = f \implies \int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

SC 17 (III) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und seien F_1, F_2 zwei verschiedene Stammfunktionen von f. Dann gilt:

(A) $F_1(x) = F_2(x+C)$ für ein C und alle $x \in \mathbb{R}$

(B) $\int_0^y F_1(x)\mathrm{d}x = \int_0^y F_2(x)\mathrm{d}x$ für alle $y \in \mathbb{R}$

(C) $F_1(x) - F_2(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(D) $F_1'(x) = F_2'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

SC 12 (III) Wir definieren $f(x) := \int_{-1}^{x} e^{2y}\,\mathrm{d}y$. Wodurch ist $f'(0)$ gegeben?

(A) 2

(B) $2(1 - e^{-2})$

(C) $1 - e^{-2}$

(D) 1

Geg.: $F(x) = \int_0^x 3\,t^2 dt$

Ges.: $F(x)$, $F'(x)$, $F(2)$ und alle Stammfunktionen von $3x^2$

Für das bestimmte Integral setzen wir die und die ein.

$F(x) =$ $=$

$F(x) =$ $F'(x) =$

$F(2) =$ $G(x) =$

0 ist eine Stammfunktion von
Alle zusammen:

Beim bestimmten Integral fällt beim Subtrahieren weg

Tipps zur Serie 9

1. Kettenlinie

Geg.: $\gamma(t) = (t, \cosh t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Ges.: $k(t)$ und Kreismittelpunkt bei $t = 0$.

Tipp: Zweimal ableiten. Beim Kürzen helfen die hyperbolischen Identitäten.
Für M erst Punkt und Einheitsnormale einsetzen.

2. Kardioide

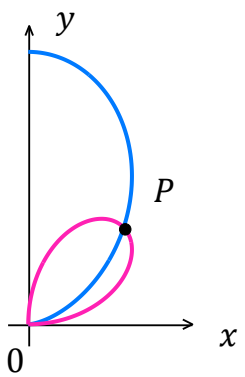
Geg.: $\gamma(t) = (2\cos t + \cos 2t,\ 2\sin t + \sin 2t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

Ges.: a) Achsenschnittpunkte mit Tangenten, besondere Tangenten und Skizze.
b) M bei $t = \pi/2$.
c) Krümmungskreis bei $t = 0$ zeichnen.

Tipp: Achsen mit $x = 0$ oder $y = 0$. Tangenten über $\dot{x}$, $\dot{y}$.
Bei $t = \pi$ sind beide null: Richtung als Grenzwert finden.

3. Polarkurven

Geg.: $\rho_1 = \sin^2\varphi$, $\rho_2 = \frac{1}{2}|\sin 2\varphi|$, $0 < \varphi < \pi/2$.
Punkte aus der Serie.

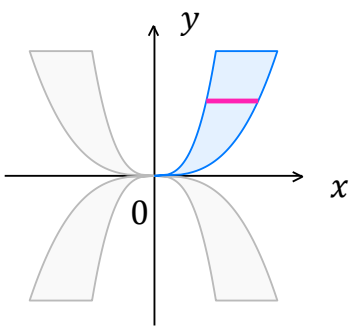


Ges.: Schnittpunkt P, Tangente an K_1 und Punktproben.

Tipp: Radien gleichsetzen.
Für die Tangente beide Koordinaten ableiten.
Punkte in die Gerade einsetzen.

4. Fläche

Geg.: $y = \pm x^3$, $y = \pm 8x^3$, begrenzt durch $y = \pm 1$.



Ges.: Gesamte Fläche A.

Tipp: Vier gleiche Teile.
Waagrechte Streifen: rechts minus links.