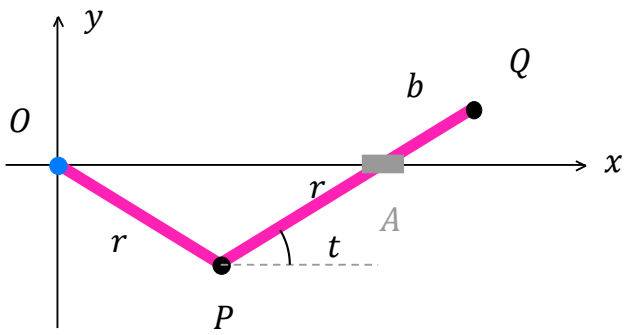
Analysis 1 - Übung 9

Bsp. Roboterarm

Geg.: $OP = PA = r$, $AQ = b$ $\quad r, b > 0$
A gleitet auf der x-Achse.

Ges.: Bahn von Q für $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$.



Wir gehen von O nach P und dann nach Q.

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} \qquad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} r\cos t \\ -r\sin t \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} (r+b)\cos t \\ (r+b)\sin t \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} r\cos t \\ -r\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (r+b)\cos t \\ (r+b)\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos t + (r+b)\cos t \\ -r\sin t + (r+b)\sin t \end{pmatrix}$$

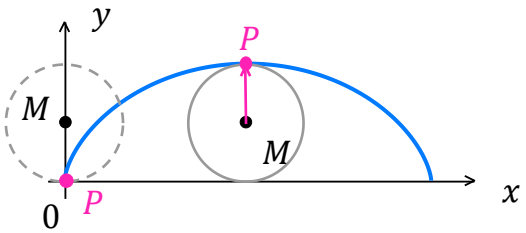
$$\underline{\underline{Q(t) = \begin{pmatrix} (2r+b)\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}}}$$

Zykloide: ein Punkt am rollenden Rad

Ohne Rutschen. r: Radradius, t: Drehwinkel.

Geg.: $r = 1$, ein Bogen mit $0 \leq t \leq 2\pi$.

Ges.: Bahn von P



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} \qquad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r\ t \\ r \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} r\sin -t \\ -r\cos -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ -r\cos t \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} r\ t \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r\sin t \\ -r\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,t - r\sin t \\ r - r\cos t \end{pmatrix}$$

$$x = r(t - \sin t)$$
$$y = r(1 - \cos t)$$

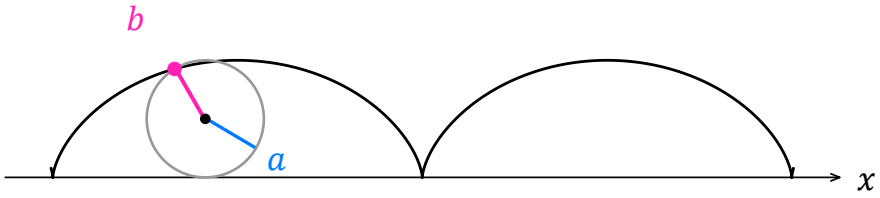
$$\underline{\underline{P(t) = \begin{pmatrix} r(t - \sin t) \\ r(1 - \cos t) \end{pmatrix}}}$$

Drei Arten der Zykloide

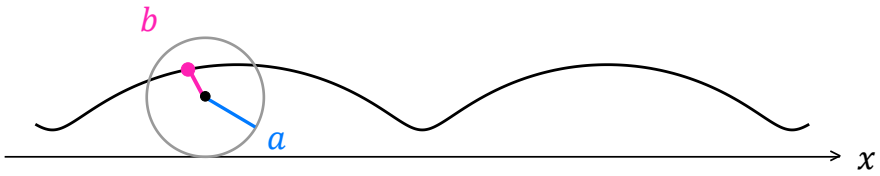
a: Radradius. b: Abstand des Punktes vom Mittelpunkt.

$$x(t) = at - b\sin t, \qquad y(t) = a - b\cos t$$

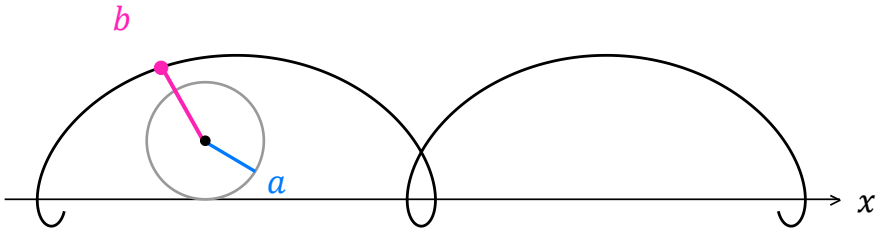
Gewöhnliche Zykloide $b = a$ Spitzen



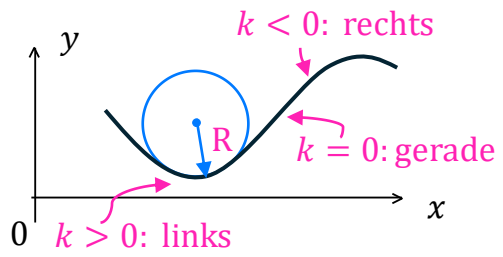
Verkürzte Zykloide $b < a$ keine Spitzen



Verlängerte Zykloide $b > a$ Schleifen



Krümmung und Krümmungsradius



Wie eng biegt die Kurve ab?
Ein kleiner passender Kreis bedeutet starke Krümmung

$\dot{\gamma} \neq 0$. Für den Radius zusätzlich $k \neq 0$.

Krümmung k(t)

$$k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

Krümmungsradius R(t)

$$R(t) = \frac{1}{k(t)}$$

Krümmungskreis und Evolute

Parametrisierung des Mittelpunktes des Krümmungskreises

$$r_E(\mathrm{t}) = \begin{pmatrix} x_E(t) \\ y_E(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + R(t)\frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}$$

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

$\bar{n}$ hat Länge 1. Das Vorzeichen von $R(t)$ wählt die Seite

$$x_E = x(t) - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}\dot{y}$$

$$y_E = y(t) + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}\dot{x}$$

Bsp.

Geg.: $\gamma(t) = (2t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

Ges.: $k(t)$, $R(t)$, $k\max(t)$, Evolute und Evolute mit konstantem minimalem Radius

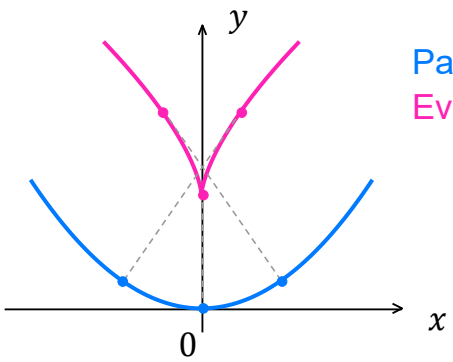
$$\dot{\gamma} = (2,2t), \qquad \ddot{\gamma} = (0,2)$$

$$k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{2 \bullet 2 \; - 0 \bullet t}{(4 + 4t^2)^{3/2}} = \frac{1}{2(1 + t^2)^{3/2}}, \quad R(t) = 2(1 + t^2)^{3/2}$$

$$\dot{k}(t) = 0 = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)(1 + t^2)^{-\frac{5}{2}}(2t) = -\frac{3t}{2(1 + t^2)^{\frac{5}{2}}} = 0 \Rightarrow \text{bei t} = 0\text{: } k_{max} = \frac{1}{2}, R_{min} = 2$$

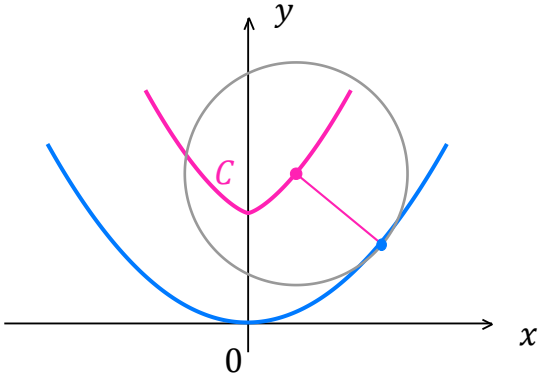
$$x_E = x(t) - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}\dot{y} = 2\text{t} - \frac{4 + 4t^2}{4} \bullet 2t = -2t^3 = x_E(t)$$

$$y_E = y(t) + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}\dot{x} = t^2 + \frac{4 + 4t^2}{4} \bullet 2 = 2 + 3t^2 = y_E(t)$$



Parabel
Evolute

Jeder Punkt der pinken Kurve gehört zu einem passenden Krümmungskreis.



$$r_E(\text{t}) = \begin{pmatrix} x_E(t) \\ y_E(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + Rmin(t)\frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} \qquad \bar{n} = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_M(t) \\ y_M(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

Zusatz: Explizite & Polar Form

Explizite:

$$k(x) = \frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}}, \quad R(x) = \frac{1}{k(x)}, \qquad r_E(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} + R(x) \bullet \bar{n}_0(x)$$

Polar:

$$k(\varphi) = \frac{\rho^2+2(\rho')^2-\rho\rho''}{(\rho^2+(\rho')^2)^{3/2}}, \qquad R(\varphi) = \frac{1}{k(\varphi)}, \qquad r_E(\varphi) = \begin{pmatrix} \rho(\varphi) \bullet \cos(\varphi) \\ \rho(\varphi) \bullet \sin(\varphi) \end{pmatrix} + R(\varphi) \bullet \bar{n}_0\,(\varphi)$$

Striche: nach φ ableiten. $\rho^2 + (\rho')^2 > 0$.

Geg.: $\rho(\varphi) = 2 + \cos\varphi$, $\varphi = 0$.

Ges.: Punkt, Krümmung und Radius.

$$\rho = 3, \quad \rho' = 0, \quad \rho'' = -1$$

$$\underline{\underline{P = (3,0), \quad k = \frac{4}{9}, \quad R = \frac{9}{4}}}$$

SC 14 (II) Welche Aussage über eine ebene Kurve und ihre Evolute ist richtig?

(A) Es gibt keine Kurve, deren Evolute nur aus einem Punkt besteht

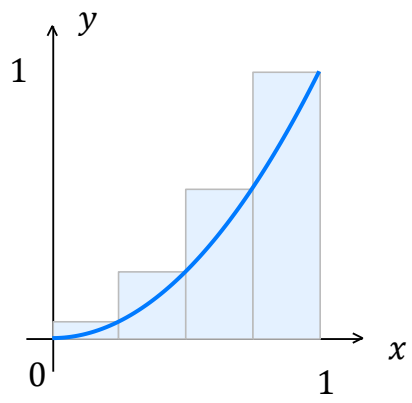
(B) Die Kurve und ihre Evolute haben immer einen Schnittpunkt

(C) Der Abstand zwischen Kurve und Evolute ist klein, wenn der Betrag der Kurvenkrümmung gross ist

(D) Die Evolute der Evolute ist immer die ursprüngliche Kurve

Bestimmtes Integral und Riemannsumme

Viele schmale Rechtecke ergeben zusammen die Fläche
Oberhalb der x-Achse positiv, darunter negativ



$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + i\Delta x,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n \qquad (f \text{ stetig}, a < b)$$

Geg.: $f(x) = x^2$ auf $[0, 1]$, vier Rechtecke, rechte Randpunkte.

Ges.: Rechtecke, S_4 und Grenzwert von S_n.

$$S_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1^2}{4^2} + \frac{1^2}{2^2} + \frac{3^2}{4^2} + 1^1\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{9}{16} + 1\right)$$

$$\underline{S_4 = \frac{15}{32}, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}}$$

Die rechten Rechtecke sind hier etwas zu hoch.
Mit immer mehr Rechtecken nähert sich die Summe dem Integral.

Integrale: Rechenregeln und Mittelwert

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx$$

$$\int_a^c f\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx, \quad \int_b^a f\,dx = -\int_a^b f\,dx$$

$$f \le g \implies \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \quad (a < b)$$

Für stetige f und g

Geg.: $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$, $\int_0^1 1\,dx = \int_1^2 1\,dx = 1$, $0 \le x^2 \le x$ auf $[0,1]$

Ges.: a) $\int_0^1 (2x+1)dx$, b) $\int_0^2 1dx$, c) $\int_1^0 x\,dx$, d) Schranken für $I = \int_0^1 x^2\,dx$

$$\underline{\text{a) } 2, \quad \text{b) } 1+1=2, \quad \text{c) } -\frac{1}{2}, \quad \text{d) } 0 \le I \le \frac{1}{2}}$$

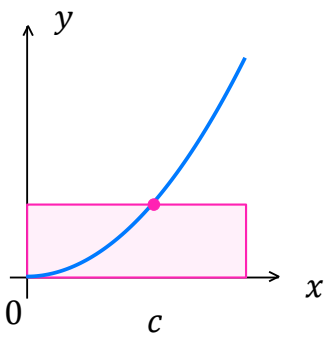
Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\exists c \in [a,b]: \quad f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Für stetiges f auf $[a,b]$, $a < b$.

Geg.: $f(x) = x^2$ auf $[0,1]$,Integral $1/3$

Ges.: Mittlere Höhe und passendes c



$$\underline{\bar{h} = \frac{1}{3}, \qquad c = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Hauptsatz und Stammfunktionen

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \implies F'(x) = f(x) \qquad (f \text{ stetig})$$

$$G' = f \implies \int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

SC 17 (III) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und seien F_1, F_2 zwei verschiedene Stammfunktionen von f. Dann gilt:

(A) $F_1(x) = F_2(x+C)$ für ein C und alle $x \in \mathbb{R}$
(B) $\int_0^y F_1(x)\mathrm{d}x = \int_0^y F_2(x)\mathrm{d}x$ für alle $y \in \mathbb{R}$
(C) $F_1(x) - F_2(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$ für alle $x \in \mathbb{R}$
(D) $F_1'(x) = F_2'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

SC 12 (III) Wir definieren $f(x) := \int_{-1}^{x} e^{2y}\,dy$. Wodurch ist $f'(0)$ gegeben?

(A) 2

(B) $2(1 - e^{-2})$

(C) $1 - e^{-2}$

(D) 1

Geg.: $F(x) = \int_0^x 3\,t^2 dt$

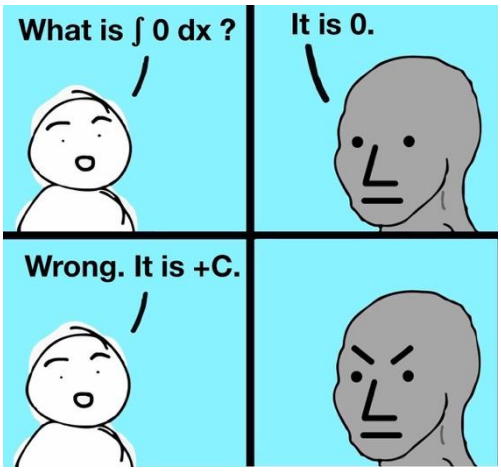
Ges.: $F(x)$, $F'(x)$, $F(2)$ und alle Stammfunktionen von $3x^2$

Eine Stammfunktion ist x^3
Für das bestimmte Integral setzen wir die obere und die untere Grenze ein.

$$F(x) = [t^3]_0^x = x^3 - 0^3$$

$$\underline{\underline{F(x) = x^3, \quad F'(x) = 3x^2}}$$

$$\underline{\underline{F(2) = 8, \quad G(x) = x^3 + C}}$$



0 ist eine Stammfunktion von 0.
Alle zusammen: die Konstanten C.

Beim bestimmten Integral fällt C beim Subtrahieren weg

Tipps zur Serie 9

1. Kettenlinie

Geg.: $\gamma(t) = (t, \cosh t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Ges.: $k(t)$ und Kreismittelpunkt bei $t = 0$.

Tipp: Zweimal ableiten. Beim Kürzen helfen die hyperbolischen Identitäten.
Für M erst Punkt und Einheitsnormale einsetzen.

2. Kardioide

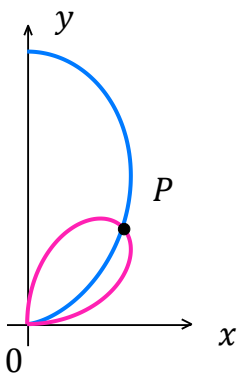
Geg.: $\gamma(t) = (2\cos t + \cos 2t,\ 2\sin t + \sin 2t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

Ges.: a) Achsenschnittpunkte mit Tangenten, besondere Tangenten und Skizze.
b) M bei $t = \pi/2$.
c) Krümmungskreis bei $t = 0$ zeichnen.

Tipp: Achsen mit $x = 0$ oder $y = 0$. Tangenten über $\dot{x}$, $\dot{y}$.
Bei $t = \pi$ sind beide null: Richtung als Grenzwert finden.

3. Polarkurven

Geg.: $\rho_1 = \sin^2\varphi$, $\rho_2 = \frac{1}{2}|\sin 2\varphi|$, $0 < \varphi < \pi/2$.
Punkte aus der Serie.

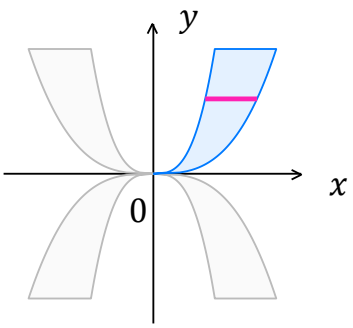


Ges.: Schnittpunkt P, Tangente an K_1 und Punktproben.

Tipp: Radien gleichsetzen.
Für die Tangente beide Koordinaten ableiten.
Punkte in die Gerade einsetzen.

4. Fläche

Geg.: $y = \pm x^3$, $y = \pm 8x^3$, begrenzt durch $y = \pm 1$.



Ges.: Gesamte Fläche A.

Tipp: Vier gleiche Teile.
Waagrechte Streifen: rechts minus links.