Analysis 1 - Übung 8

Höhere Ableitungen

Einmal ableiten kennen wir schon. Jetzt leiten wir das Ergebnis noch einmal ab.

$$f(x) \quad \longrightarrow \quad f'(x) \quad \longrightarrow \quad f''(x)$$

f' sagt: Wie steil ist der Graph? Steigung

f'' sagt: Wie verändert sich diese Steigung? Krümmung

Bsp.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 \\ f'(x) &= 4x^3 \\ f''(x) &= 12x^2 \\ f'''(x) &= 24x \\ f^{(4)}(x) &= 24 \end{aligned}$$

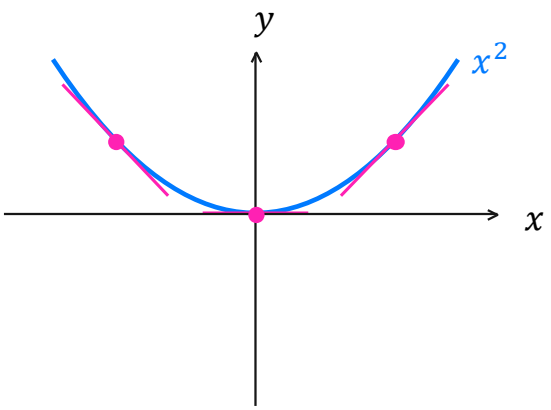
$f^{(4)}$ heisst vierte Ableitung. Die kleine Zahl ist hier keine Potenz.



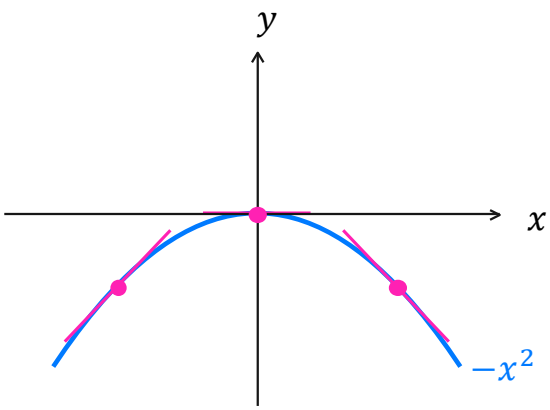
Konvex und konkav

Wenn man den Graphen «entlang» fährt:

konvex



konkav



Konvex: Die Steigung wird grösser

«Linksgekrümmt» Denk an eine Schüssel

$$f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{konvex}$$

Konkav: Die Steigung wird kleiner

«Rechtsgekrümmt» Denk an eine Kuppel

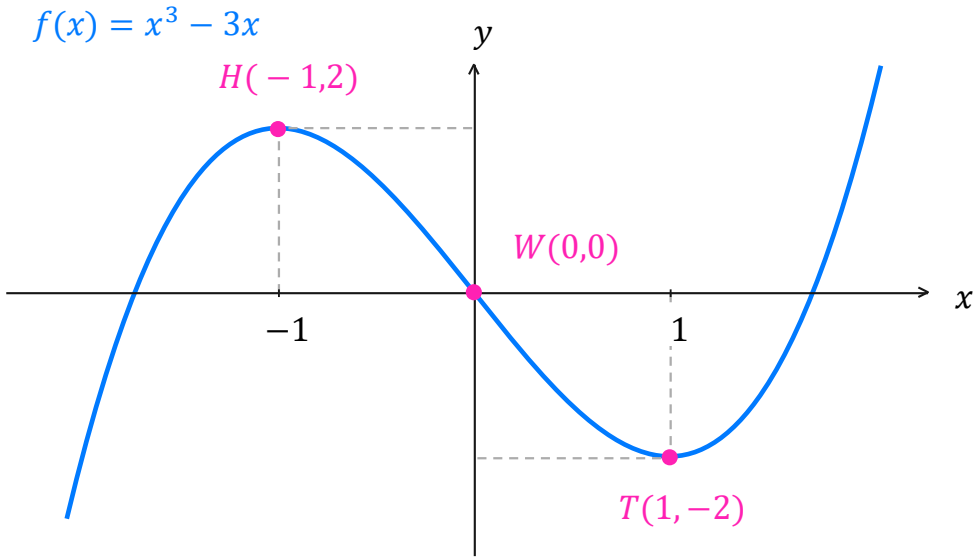
$$f''(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{konkav}$$

Wir prüfen das Vorzeichen jeweils auf einem ganzen Intervall.



Extremum und Wendepunkt

$$f(x) = x^3 - 3x, \qquad f'(x) = 3x^2 - 3, \qquad f''(x) = 6x$$



Hochpunkt oder Tiefpunkt?

Zuerst $f'(x) = 0$ lösen. Hier: $x = -1$ und $x = 1$.

$$f''(-1) < 0 \quad \Rightarrow \quad H = (-1,2)$$
$$f''(1) > 0 \quad \Rightarrow \quad T = (1,-2)$$

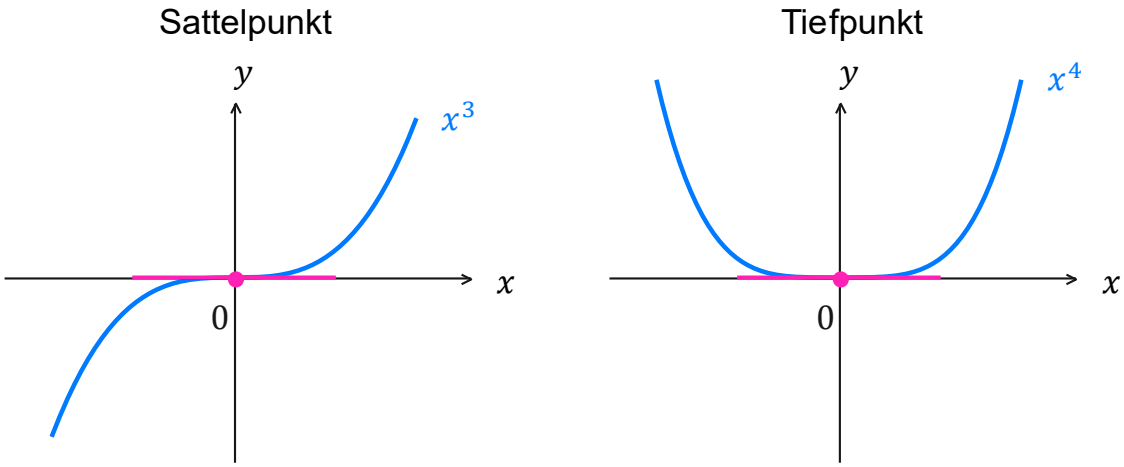
Wo wechselt die Biegung?

f'' wechselt bei $x = 0$ von Minus zu Plus. Dort ist der Wendepunkt $W = (0,0)$.

$f' = 0$ allein reicht nicht für ein Extremum. Randpunkte prüfen wir separat.

Wenn die zweite Ableitung null ist

Bei beiden Funktionen gilt am Ursprung: $f'(0) = f''(0) = 0$.



Bei x^3 wechselt die Biegung:
ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente, also ein Sattelpunkt.

Bei x^4 bleibt die Biegung gleich: ein Tiefpunkt.

$f''(a) = 0$ liefert nur einen Kandidaten.
Für einen Wendepunkt muss die Biegung wechseln.

Alle Sattelpunkte sind Wendepunkte, nicht umgekehrt!
Sattelpunkt = Wendepunkt + waagerechte Tangente

Weiter ableiten kann helfen

Erste nichtverschwindende Ableitung	Was folgt?
n gerade, $f^{(n)}(a) > 0$	Tiefpunkt
n gerade, $f^{(n)}(a) < 0$	Hochpunkt
$n \geq 3$ ungerade	Sattelpunkt

Bei x^4 ist erst die vierte Ableitung ungleich null: $f^{(4)}(0) = 24 > 0$.

SC 18 (VIII) Was ist die dritte Ableitung der Funktion $f(x) = \ln((1+x)^3)$ an der Stelle $x_0 = 0$?

(A) $f^{(3)}(0) = 0$
(B) $f^{(3)}(0) = 3$
(C) $f^{(3)}(0) = 1$
(D) $f^{(3)}(0) = 6$

Bsp.: Untersuche $f(x) = e^{-x^2}$ auf Kurvenform und Wendestellen:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \qquad u(x) = -2x \qquad u'(x) = -2$$

$$v(x) = e^{-x^2} \qquad v'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$f''(x) = 4x^2e^{-x^2} - 2e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$

$$f''(x) = 0 = (4x^2 - 2)e^{-x^2} \Rightarrow 4x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Konvex/Konkav:

- $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$: Testwert x = -1 $\Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ konvex
- $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$: Testwert x = 0 $\Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$ konkav
- $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$: Testwert x = 1 $\Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ konvex

Wendestelle:

- Bei $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ aufgrund Vorzeichenänderung um $f'''(x)$
- Prüfen über $f'''(x) \neq 0$ möglich

Ebene Kurven

Explizit: Kurve K ist als Graph einer Funktion gegeben

$$f(x) = y = 5x - 2$$

Nachteil: für X input gibt es nur einen Y output

Implizit: Kurve K ist als Menge der Punkte (x,y)

$$F(x) = 5x - y - 2 = 0$$

Nachteil: Punkte (x,y) erfüllen die Gleichung

Parametrisch: Kurve K wird durch Koordinaten (x, y) beschrieben

$$\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 5t - 2 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$

Koordinaten (x, y) verändern sich mit der Hilfsvariable t (Parameter t)

Umwandeln der Darstellung

Bsp.: Wir möchten eine Gleichung nur mit x und y.

$$\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} t-3 \\ t^3 - t \end{pmatrix}$$

Erst nach t auflösen, dann einsetzen

$$t = x + 3 \quad \Rightarrow \quad y = (x+3)^3 - (x+3)$$

Fertig. Ausmultiplizieren ist hier gar nicht nötig.

Bsp.: Beim Kreis hilft eine bekannte Formel

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad 0 \le t < 2\pi$$

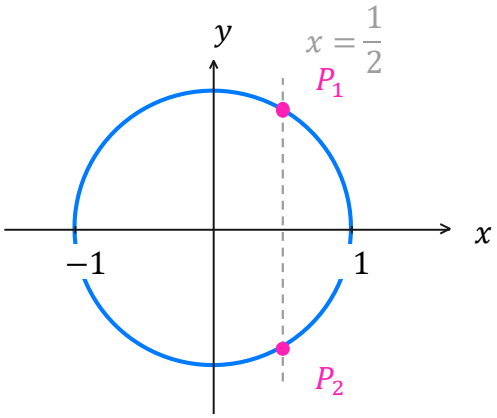
$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Nach y aufgelöst erhalten wir zwei Äste:

$$y = \sqrt{1-x^2} \quad \text{oder} \quad y = -\sqrt{1-x^2}, \qquad -1 \le x \le 1$$

Plus beschreibt die obere Hälfte, Minus die untere.

Ein ganzer Kreis ist kein einzelner Funktionsgraph:
Zum gleichen x gehören hier zwei y-Werte.



SC 13 (II) Eine Kurve sei durch die implizite Gleichung $y^2 - 4x^3 = 0$ gegeben. Wie kann man diese Kurve parametrisieren?

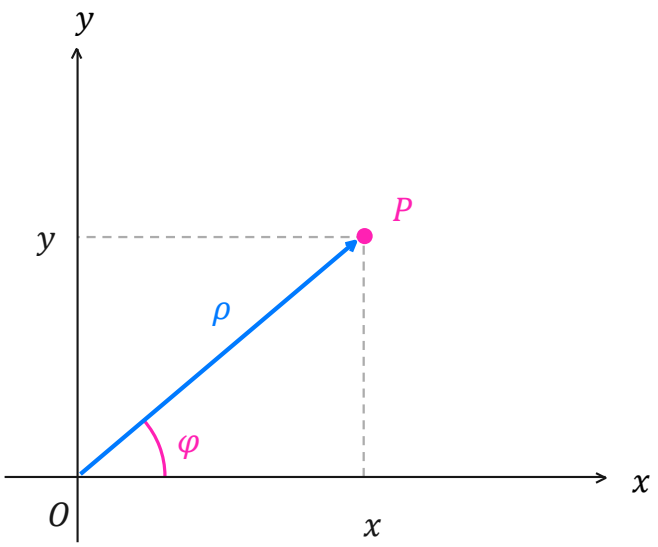
(A) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t^3 \end{pmatrix}$

(B) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$

(C) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{4} \\ t^3 \end{pmatrix}$

(D) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t^3 \\ 4t^2 \end{pmatrix}$

Polarkoordinaten



$$x = \rho \cos \varphi$$
$$y = \rho \sin \varphi$$

$\rho \geq 0$ ist der Abstand. φ ist der Winkel ab der positiven x-Achse.

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

Bsp.

Wenn $\rho = 2$ bleibt und der Winkel einmal herumläuft, entsteht ein Kreis mit Radius 2.

Eine Kurve in Polarform

Oft hängt der Abstand vom Winkel ab: $\rho = \rho(\varphi)$.
Beim Drehen gehen wir dann näher zum Ursprung oder weiter weg.

In Serie 8 setzen wir genau diese x- und y-Formeln in die Kurvengleichung ein.

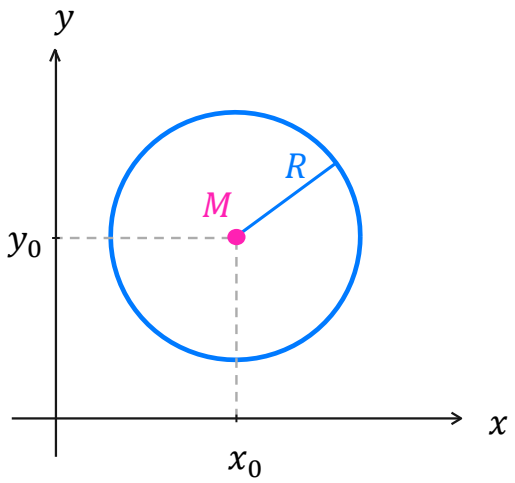
Kreis und Ellipse

Kreis: gleicher Abstand zum Mittelpunkt

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

$$\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + R\cos t \\ y_0 + R\sin t \end{pmatrix}$$

Kreis

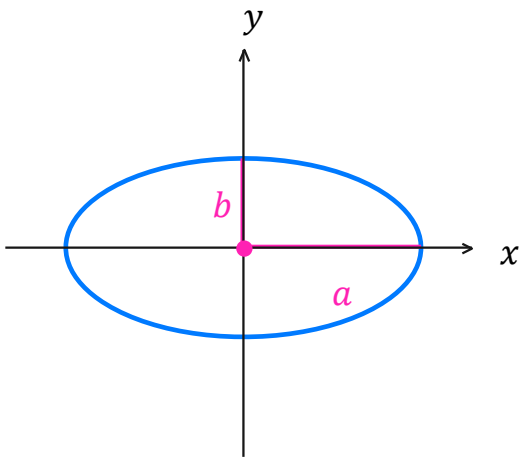


Ellipse: ein gestreckter Kreis

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$$

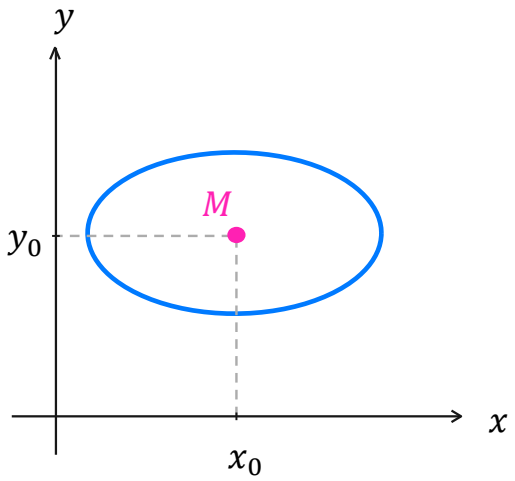
Ellipse



a ist die halbe Breite, b die halbe Höhe.
Es gilt $R, a, b > 0$ und jeweils $0 \leq t < 2\pi$.

Für den Mittelpunkt (x_0, y_0):

$$\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + a\cos t \\ y_0 + b\sin t \end{pmatrix}$$



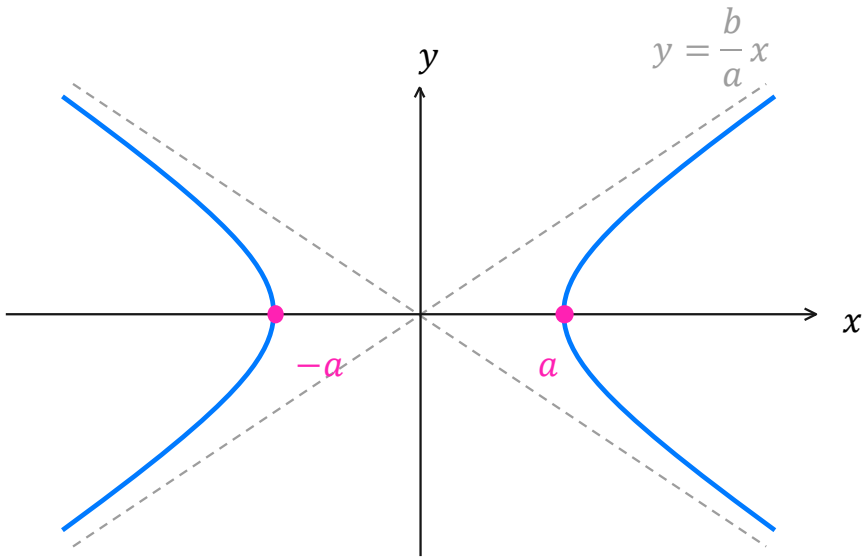
Zum Mitdenken

Was wird aus der Ellipse, wenn $a = b$?

Hyperbel

Bei der Ellipse steht ein Plus. Bei dieser Hyperbel steht ein Minus.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a, b > 0$$



Zwei Äste, zwei Vorzeichen

$$\vec{r}_{\pm}(t) = \begin{pmatrix} \pm a \cosh t \\ b \sinh t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Plus gibt den rechten Ast, Minus den linken.

Einsetzen funktioniert wegen:

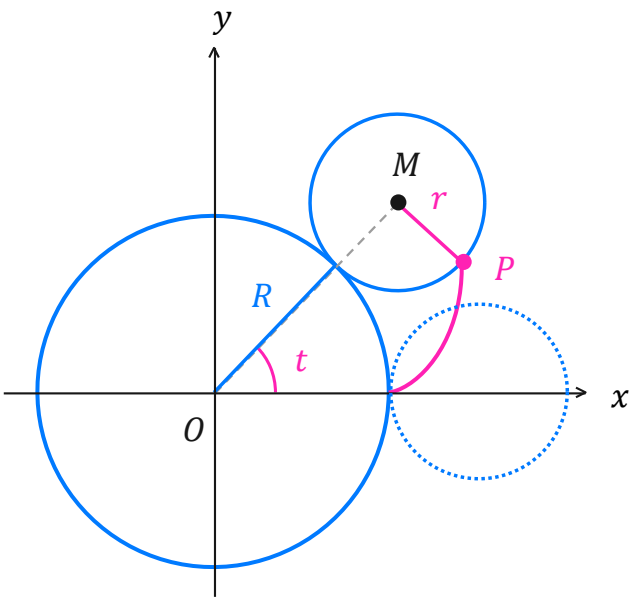
$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

Weiter draussen nähern sich die Äste den gestrichelten Geraden:

$$y = \frac{b}{a}x \qquad \text{und} \qquad y = -\frac{b}{a}x$$

Epizykloide · Zusatz

Ein kleiner Kreis rollt aussen um einen grossen Kreis, ohne zu rutschen.
Wir verfolgen einen Punkt auf seinem Rand.



Vom Ursprung zum Mittelpunkt, dann zum Randpunkt

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$$

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} (R+r)\cos(t) \\ (R+r)\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -r\cos(t+\beta) \\ -\mathrm{r}\sin(t+\beta) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} (R+r)\cos(t) - r\cos(t+\beta) \\ (R+r)\sin(t) - \mathrm{r}\sin(t+\beta) \end{pmatrix}$$

Der Mittelpunkt läuft auf einem Kreis mit Radius $R+r$.
β ist die zusätzliche Drehung durch das Abrollen.

$$Rt = r\beta \quad \Rightarrow \quad t + \beta = \frac{R+r}{r}\, t$$

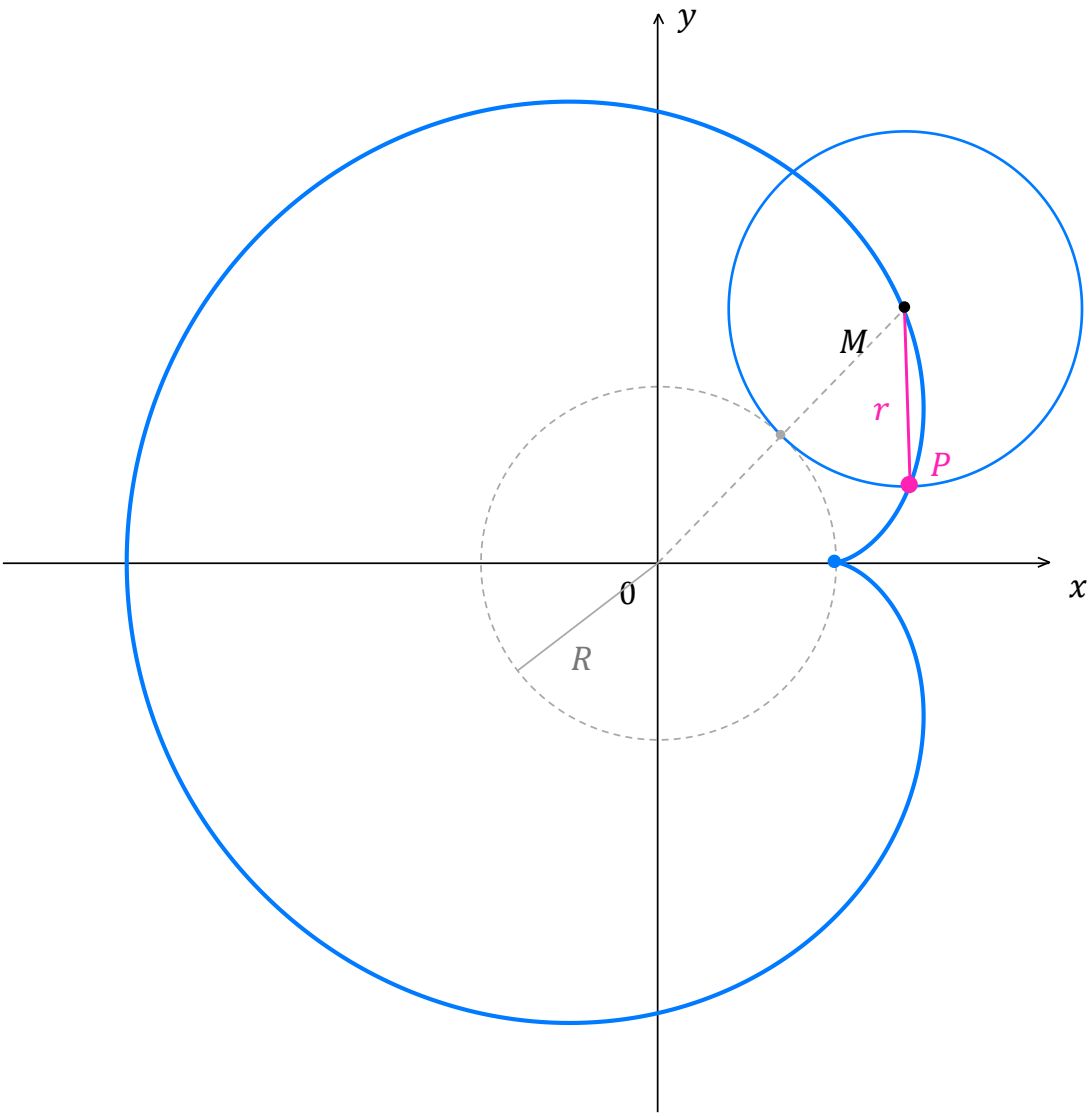
$$\begin{aligned} x(t) &= (R+r)\cos t - r\cos\left(\frac{R+r}{r}\, t\right) \\ y(t) &= (R+r)\sin t - r\sin\left(\frac{R+r}{r}\, t\right) \end{aligned}$$

Wir starten bei $P = (R, 0)$

Kardioide

Ein Kreis rollt aussen um einen gleich grossen Kreis.
Ein Punkt auf seinem Rand zeichnet die Herzkurve.

$R = r$



Grau: fester Kreis. Blau: rollender Kreis.

P zeichnet die farbige Kurve.

$$x(t) = 2\cos t - \cos(2t)$$

$$y(t) = 2\sin t - \sin(2t)$$

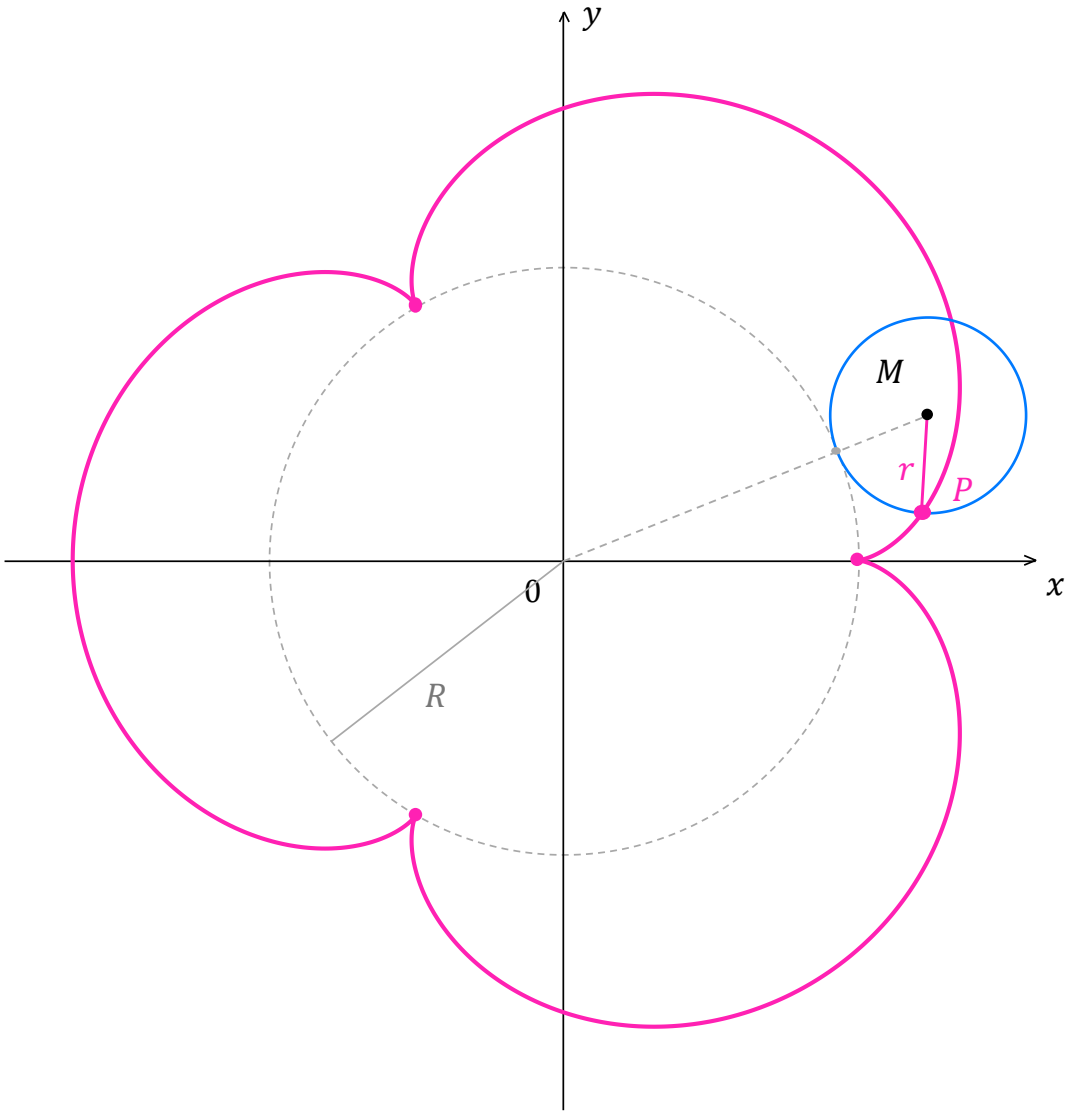
$r = 1, \qquad 0 \le t \le 2\pi$

Eine Spitze

Dreiblättrige Epizykloide

Der kleine Kreis rollt aussen. Der grosse Radius ist dreimal so gross wie der kleine.

$R = 3r$



Grau: fester Kreis. Blau: rollender Kreis.

P zeichnet die farbige Kurve.

$$x(t) = 4\cos t - \cos(4t)$$

$$y(t) = 4\sin t - \sin(4t)$$

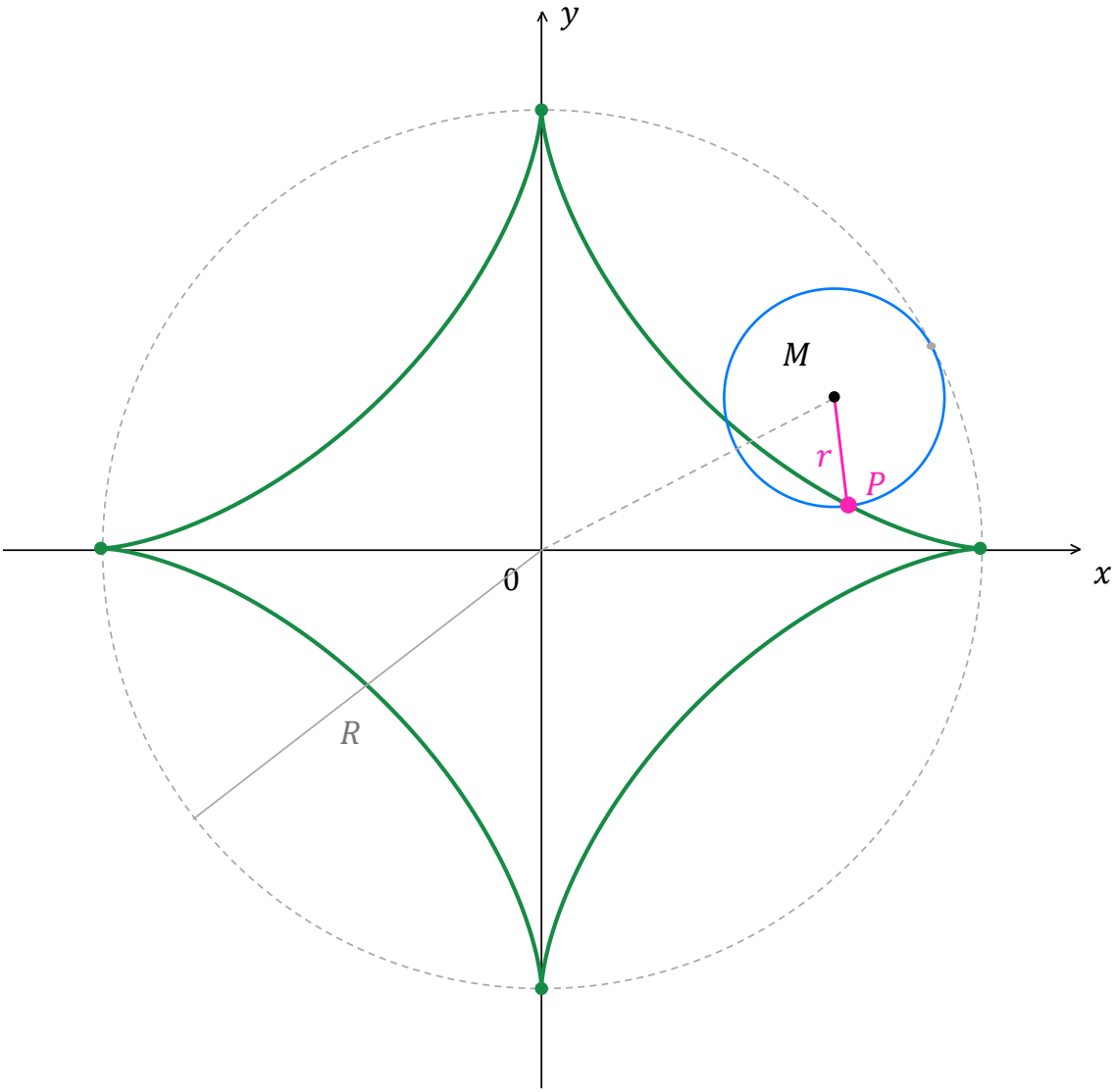
$r = 1, \qquad 0 \le t \le 2\pi$

Drei Spitzen

Hypozykloide: Astroide

Der kleine Kreis rollt innen. Hier ist der grosse Radius viermal so gross wie der kleine.

$R = 4r$



Grau: fester Kreis. Blau: rollender Kreis.

P zeichnet die farbige Kurve.

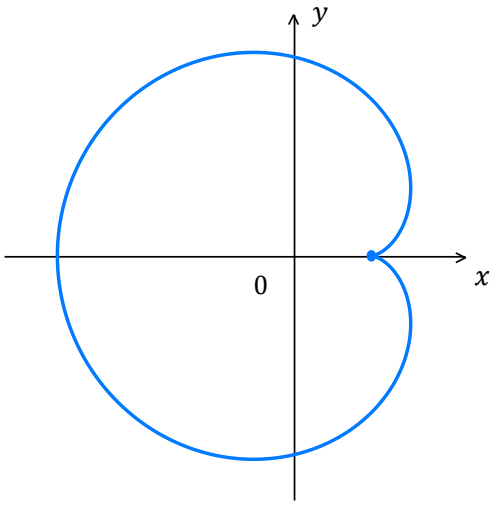
$$x(t) = 4\cos^3 t$$

$$y(t) = 4\sin^3 t$$

$r = 1, \qquad 0 \le t \le 2\pi$

Vier Spitzen

Kardioide, Epizykloide und Hypozykloide



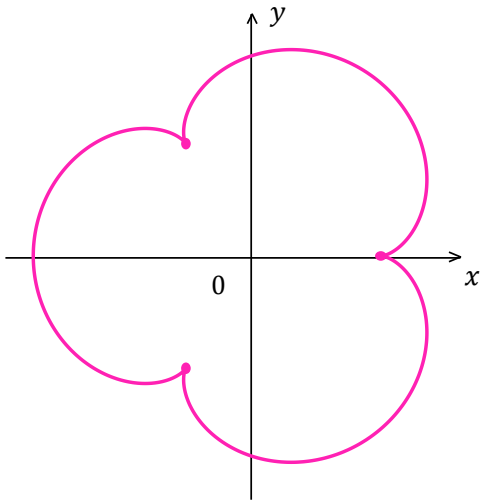
Kardioide

$R = r$

Eine Spitze, aussen gerollt.

$x(t) = 2\cos t - \cos(2t)$

$y(t) = 2\sin t - \sin(2t)$



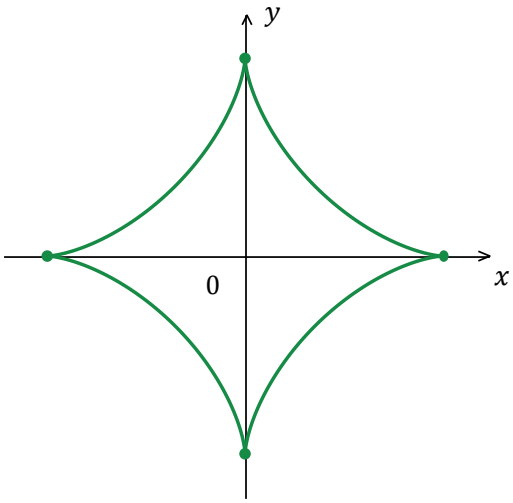
Dreiblättrige Epizykloide

$R = 3r$

Drei Spitzen, aussen gerollt.

$x(t) = 4\cos t - \cos(4t)$

$y(t) = 4\sin t - \sin(4t)$



Hypozykloide: Astroide

$R = 4r$

Vier Spitzen, innen gerollt.

$x(t) = 4\cos^3 t$

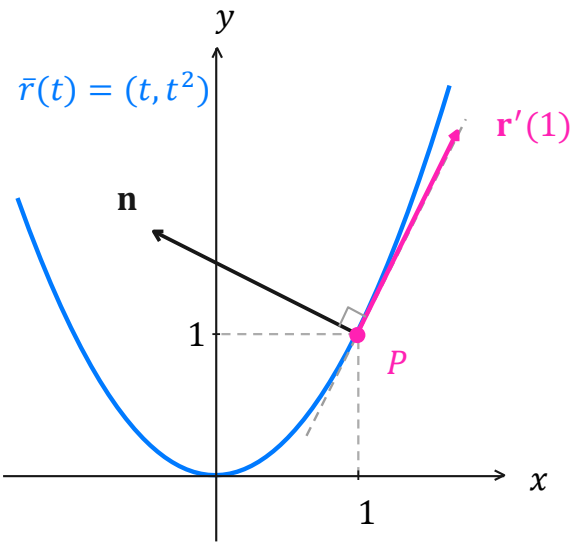
$y(t) = 4\sin^3 t$

$r = 1, \qquad 0 \le t \le 2\pi$

Hypozykloide: ein Beispiel aus der Familie.

Tangente und Normale

Die Tangente zeigt, in welche Richtung die Kurve im Punkt weiterläuft.
Die Normale steht senkrecht dazu.



Tangentenrichtung:

$$\bar{r}'(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$$

Tangentengleichung:

$$\bar{t}\,(s) = \bar{r}(t) + s \bullet \bar{r}'(t)$$

Für eine Normale um 90 Grad drehen

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

Tangentensteigung:

$$m = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Die beiden Vektoren stehen senkrecht aufeinander: Ihr Skalarprodukt ist null.

$$a(-b) + ba = 0$$

Tangente: ein kurzes Beispiel

$$\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \qquad t_0 = 1$$

Erst den Punkt ausrechnen, dann die Richtung:

$$P = \bar{r}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{r}'(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gerade = Startpunkt + Vielfaches der Richtung

$$\mathbf{T}(s) = \bar{r}(t_0) + s\,\bar{r}'(t_0), \qquad s \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{T}(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 1$$

Falls ein Normalenvektor der Länge 1 gefragt ist

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Teile den Vektor durch seine Länge.

Waagrecht oder senkrecht?

Bedingung bei t_0	Tangente
$y' = 0, \quad x' \neq 0$	waagrecht
$x' = 0, \quad y' \neq 0$	senkrecht

SC 11 (II) Wir betrachten eine Kurve mit Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) := \big(2\cos t, \sin t\big).$$

Wodurch ist die Tangente an diese Kurve im Punkt $\vec{r}(\pi/4)$ gegeben?

(A) $\left\{\left(\sqrt{2} - a, \frac{1}{\sqrt{2}} + a\right) \,\middle|\, a \in \mathbb{R}\right\}$

(B) $\left\{\left(\sqrt{2}(1+a), \frac{1}{\sqrt{2}} + a\right) \,\middle|\, a \in \mathbb{R}\right\}$

(C) $\left\{\left(\sqrt{2}(1-a), \frac{1+a}{\sqrt{2}}\right) \,\middle|\, a \in \mathbb{R}\right\}$

(D) $\left\{\left(\sqrt{2} + a, \frac{1+a}{\sqrt{2}}\right) \,\middle|\, a \in \mathbb{R}\right\}$

Tipps zur Serie 8

Aufgabe 1a · Definitionsbereich und Nullstellen

$$f(x) = x^{3/2}(x-2)^3$$

Schreibe $x^{3/2} = x\sqrt{x}$. Welche x-Werte sind erlaubt? Wann wird einer der Faktoren null?

Aufgabe 1b · Monotonie und Extrema

Produktregel, dann ausklammern. Prüfe das Vorzeichen von f' zwischen seinen Nullstellen. Den Randpunkt separat anschauen.

Aufgabe 1c · Wertebereich

Suche den kleinsten Funktionswert. Was passiert für sehr grosse x? Die Funktion ist auf ihrem Definitionsbereich stetig.

Aufgabe 1d / 1e · Biegung und Skizze

$f'' = 0$ liefert Kandidaten. Prüfe den Vorzeichenwechsel. Zeichne zuerst Nullstellen, Extrema und Wendepunkte, dann verbinde passend.

Aufgabe 2a · Polarform

Setze $x = \rho\cos\varphi$ und $y = \rho\sin\varphi$ ein. Klammere $\rho^{2/3}$ aus und löse nach ρ auf.

$$(\cos\varphi)^{2/3} = |\cos\varphi|^{2/3}$$

Die Beträge sind wichtig: Die Kurve liegt in allen vier Quadranten.

Aufgabe 2b · Kleinster Abstand

Nutze die Symmetrie und starte im ersten Quadranten. Ein grösserer Nenner bedeutet einen kleineren Abstand. Prüfe auch die Winkel auf den Achsen.

Tipps zur Serie 8

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t}{1+t^3} \\ \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{pmatrix}, \qquad t \neq -1$$

Aufgabe 3a · Wohin läuft die Kurve?

Teile für $t \to \pm\infty$ durch die höchste Potenz im Nenner. Wird der Grenzpunkt auch bei einem endlichen t erreicht?

Aufgabe 3b · Schnitt mit y = x

Setze $x(t) = y(t)$. Bringe alles auf eine Seite und klammere aus. Teile nicht einfach durch t, sonst geht dir eine Lösung verloren.

Aufgabe 3c · Eine Ableitung ist null

Leite x und y einzeln ab. Löse $x'(t) = 0$ und $y'(t) = 0$ getrennt. Setze die t-Werte anschliessend in beide Koordinaten ein.

Gesucht sind die Punkte. Es reicht, wenn eine der beiden Ableitungen null ist.

Aufgabe 3d · Ohne Parameter

$$\frac{y(t)}{x(t)} = t \qquad (t \neq 0, -1)$$

Setze diesen Ausdruck für t ein und entferne die Nenner. Den Ursprung danach separat prüfen, weil du durch x geteilt hast.

Aufgabe 3e · Zusatz / Woche 8

Tangente = Punkt + Vielfaches des Ableitungsvektors. Beim Ursprung gibt es noch den Weg aus 3a: Setze dafür $u = 1/t$ und untersuche u nahe null.

Vergiss nach dem Rechnen die Punktkoordinaten nicht.