Serie 6: Aufgabe 1d - Abstände und Kreis

$$\frac{|z+2-2i|}{|z+i|} = 2$$

$$|z+2-2i| = 2|z+i|$$

$$|z+2-2i|^2 = 4|z+i|^2$$ Mit $z = x + iy$ einsetzen

$$|\mathrm{x}+\mathrm{yi}+2-2i|^2 = 4|\mathrm{x}+\mathrm{yi}+i|^2$$

$$|\mathrm{x}+2+\mathrm{yi}-2i|^2 = 4|\mathrm{x}+\mathrm{yi}+i|^2$$ $|z|^2 = z\bar{z}$

$$|(\mathrm{x}+2)+(\mathrm{y}-2)i|^2 = 4|(\mathrm{x})+(\mathrm{y}+i)|^2$$ $(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$

$$(x+2)^2+(y-2)^2 = 4(x^2+(y+1)^2)$$

$$x^2+4x+4+y^2-4y+4 = 4x^2+4y^2+8y+4$$

$$0 = 3x^2-4x+3y^2+12y\ -4$$

$$0 = 3(x^2-\frac{4}{3}x+y^2+4y\ -\frac{4}{3}) = 3(x^2-2\bullet\frac{2}{3}x+y^2+2\bullet 2y\ -\frac{4}{3})$$

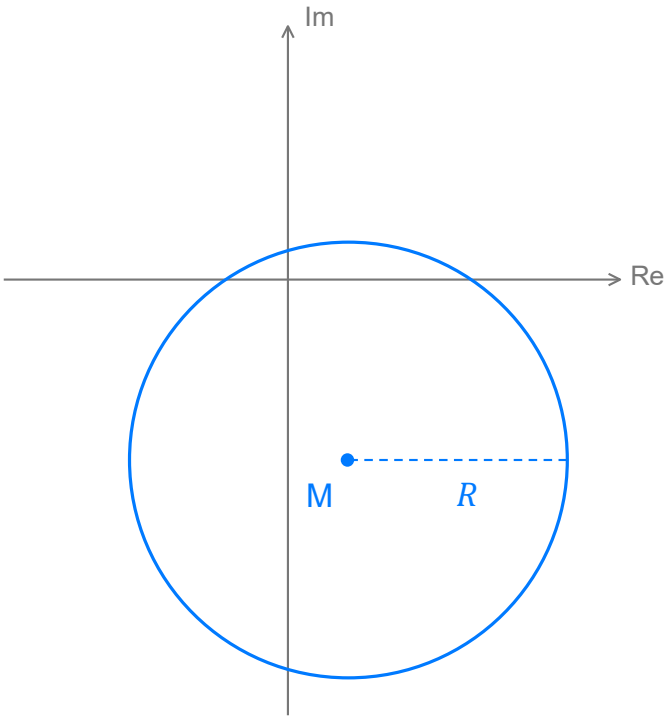
$$0 = 3((x-\frac{2}{3})^2-\frac{4}{9}+(y+2)^2-4\ -\frac{4}{3})$$

$$0 = 3(x-\frac{2}{3})^2+3(y+2)^2-16\ -\frac{4}{3}$$

$$\frac{52}{9} = (x-\frac{2}{3})^2+(y+2)^2$$

Serie 6: Aufgabe 1d - Abstände und Kreis

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y+2)^2=\frac{52}{9}$$



Mittelpunkt

$$M=\left(\frac{2}{3},-2\right)$$

Radius

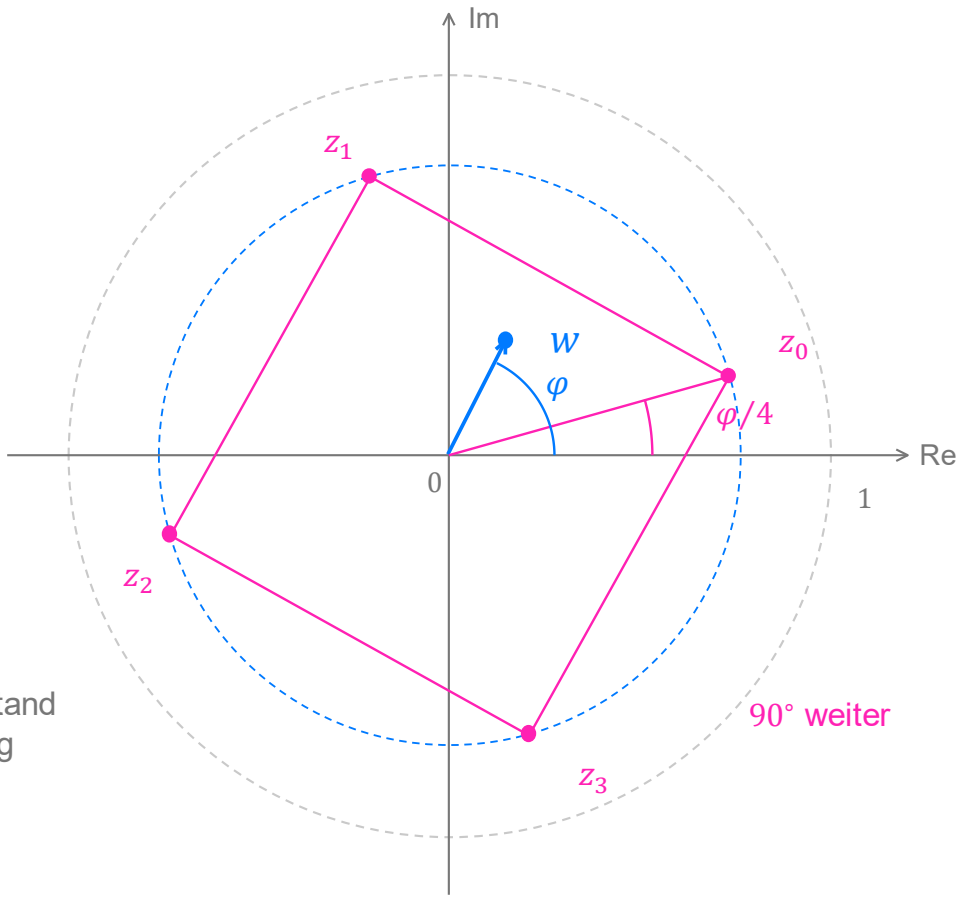
$$R=\sqrt{\frac{52}{9}}\approx 2.40$$

Nur die Kreislinie gehört dazu. Das Innere bleibt leer.

Serie 6: Aufgabe 3a - Vier Wurzeln zeichnen

Wir suchen vier Zahlen, die hoch vier wieder w ergeben.

$$z^4 = w, \qquad w = re^{i\varphi}$$



Gleicher Abstand zum Ursprung

1. Abstand

Aus dem Betrag r wird $\sqrt[4]{r}$. Hier gilt:

$$0 < r < 1 \quad \Rightarrow \quad r < \sqrt[4]{r} < 1$$

Die Wurzeln liegen weiter aussen als w, aber im Einheitskreis.

2. Erster Winkel: durch vier teilen

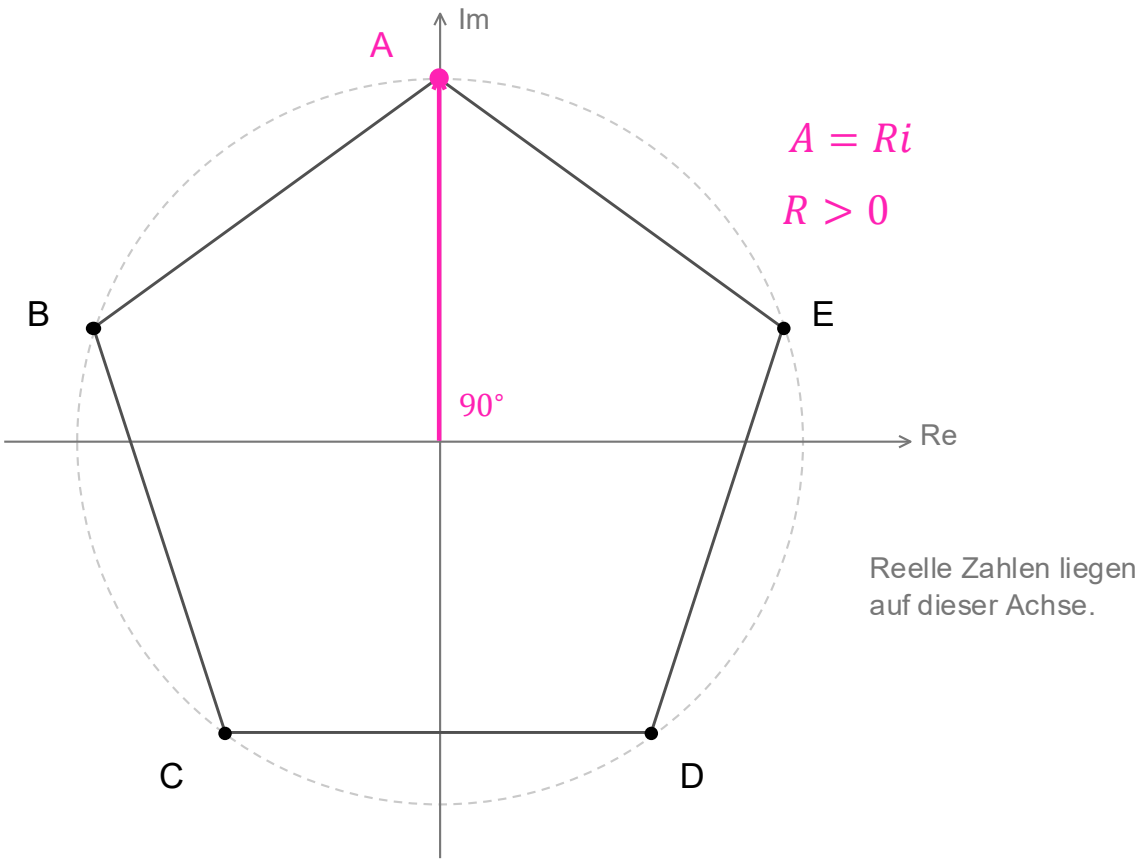
3. Drei weitere Punkte: immer 90° weiter

$$z_k = \sqrt[4]{r}\, e^{i(\varphi/4 + k\pi/2)}, \qquad k = 0,1,2,3$$

Serie 6: Aufgabe 3b - Kann w reell sein?

Die fünf Punkte sollen fünfte Wurzeln derselben Zahl sein.

Zum Prüfen genügt der obere Punkt A.



Beim Potenzieren wird der Winkel multipliziert.

$$5 \cdot 90° = 450° = 360° + 90°$$

Eine ganze Runde und nochmals nach oben.
Also liegt auch A^5 auf der positiven imaginären Achse.

$$w = A^5 = (Ri)^5 = R^5 i$$

Nein, w ist nicht reell.

Eine reelle Zahl müsste auf der waagrechten Achse liegen.

arazzakov@ethz.ch

Passwort: 12345678

Analysis 1 - Übung 7

Nullstellen von reellen Polynomen

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n$$

n = Grad des Polynoms a_i = reelle Koeffizienten



Komplexe Nullstellen

Eine Nullstelle ist eine Zahl, die beim Einsetzen null ergibt.

$$p(z) = 0$$

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

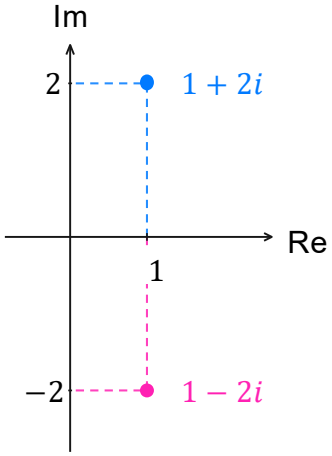
$b^2 - 4ac > 0$: 2 reele Nullstellen
$b^2 - 4ac = 0$: doppelte reele Nullstelle
$b^2 - 4ac < 0$: 2 komplexe Nullstellen

Bsp.

$$z^2 - 2z + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \bullet 5}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \bullet 5}}{2} = 1 \pm \sqrt{-4}$$

$$z_1 = 1 + 2i, \qquad z_2 = 1 - 2i$$



Die beiden Punkte sind Spiegelbilder an der reellen Achse.

Komplexe Nullstellen kommen immer in komplex konjugierten Paaren vor:
$a + bi$ und $a - bi$

Nullstellen zählen

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n$$

n = Grad des Polynoms a_i = reelle Koeffizienten

$$p(z) = z^5 - 67z^4 + 69z^3 + 27z^2 + 2026z + 104$$

Der Grad sagt, wie viele Nullstellen es insgesamt(=reell + komplex) gibt.
Wiederholte Nullstellen zählen mehrfach.

$$\text{Grad } n = \#\text{ Nullstellen}$$

Bsp. Eine doppelte Nullstelle

$$p(z) = (z-2)^2(z^2+1) = (z-2)(z-2)\,(z^2+1)$$

Nullstelle	Wie oft?
2	zweimal
i	einmal
$-i$	einmal

Vier Nullstellen gezählt, aber nur drei verschiedene Zahlen.

Reelle & komplexe Nullstellen

r_p zählt die reellen, c_p die nicht-reellen Nullstellen, jeweils mit Vielfachheit.

$$r_p + c_p = n, \qquad c_p \in \{0,2,4,\dots\}$$

Nicht-reelle Nullstellen kommen paarweise.
Bei ungeradem Grad bleibt mindestens eine reelle übrig.

$$\text{Grad } 3: \qquad (r_p, c_p) = (3,0) \text{ oder } (1,2)$$

SC 9 (A) Sei $p(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Es sei bekannt, dass die komplexen Zahlen $-1-i$, 0, $1+i$ und $-1+i$ Nullstellen von p sind. Was ist der kleinstmögliche Grad von p unter diesen Bedingungen?

(A) 7
(B) 5
(C) 8
(D) 4

Nullstellen finden

Gegeben ist eine Nullstelle $1+i$ von $\mathrm{p(z)}$. Wir suchen die restlichen Nullstellen.

$$p(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26 = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$$

Das Paar liefert einen Faktor

$$1+i \Rightarrow 1-i \quad \Rightarrow \quad \mathrm{p(z)} = (z-(1+i))(z-(1-i))(z-z_3)(z-z_4)$$

$$(z-(1+i))(z-(1-i)) = (z-1)^2 + 1 = z^2 - 2z + 2$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{l} (z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26) : (z^2 - 2z + 2) = (z^2 - 4z + 13) \\ \underline{-(z^4 - 2z^3 + 2z^2)} \\ \quad -4z^3 + 21z^2 - 34z \\ \quad \underline{-(4z^3 + 8z^2 - 8z)} \\ \quad\quad 13z^2 - 26z + 26 \\ \quad\quad \underline{-(13z^2 - 26z + 26)} \\ \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

$$p(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 - 4z + 13)$$

$$z^2 - 4z + 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{3,4} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \bullet 13}}{2}$$

$$z_{3,4} = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm \sqrt{-9}$$

$$z_{3,4} = 2 \pm 3i$$

$$z_1 = 1+i, \quad z_2 = 1-i, \quad z_3 = 2+3i, \quad z_4 = 2-3i$$

Kontrolle: vier Nullstellen für ein Polynom vierten Grades.

SC 8 (A) Wie viele reelle, mit Vielfachheit gezählten Nullstellen hat das Polynom $P(x) = x^4 - x$?

(A) 1
(B) 3
(C) 4
(D) 2

Hyperbolische Funktionen

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x), \qquad z = re^{ix}$$

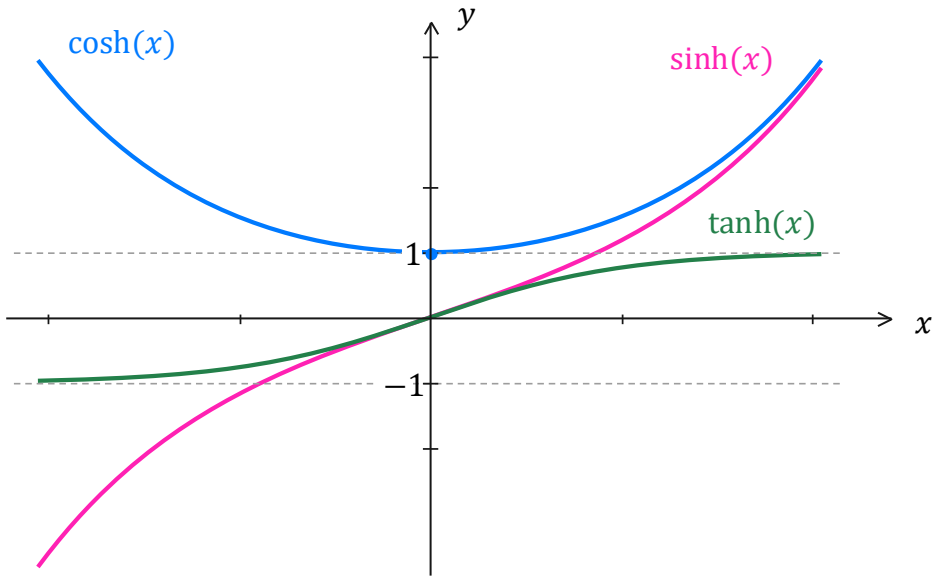
$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Aber was passiert, wenn wir statt x einfach ix in den cos(•) oder –i sin(•) einsetzen?

$$\cos(ix) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}, \qquad -i\sin(ix) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$\cos(ix) = \cosh(x), \qquad -i\sin(ix) = \sinh(x)$$

$$\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad \sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$



cosh = achsensymmetrisch zum y-Achse = gerade
sinh & tanh = punktsymmetrisch zum Ursprung = ungerade

$$\cosh(0) = 1, \qquad \sinh(0) = 0, \qquad \tanh(0) = 0$$

$\cosh x \geq 1$. Der Graph von tanh bleibt zwischen -1 und 1.

$$\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1$$

Rechnen mit sinh und cosh

$$\cos^2(ix) + \sin^2(ix) = 1$$

$$\cos(ix) = \cosh(x) \qquad \sin(ix) = i\sinh(x)$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Ableitungen

$$(\sinh x)' = \cosh x, \qquad (\cosh x)' = \sinh x$$

Bei der Ableitung von $\cosh$ entsteht kein Minuszeichen.

$$(\tanh x)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

Additionsformeln

$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$$

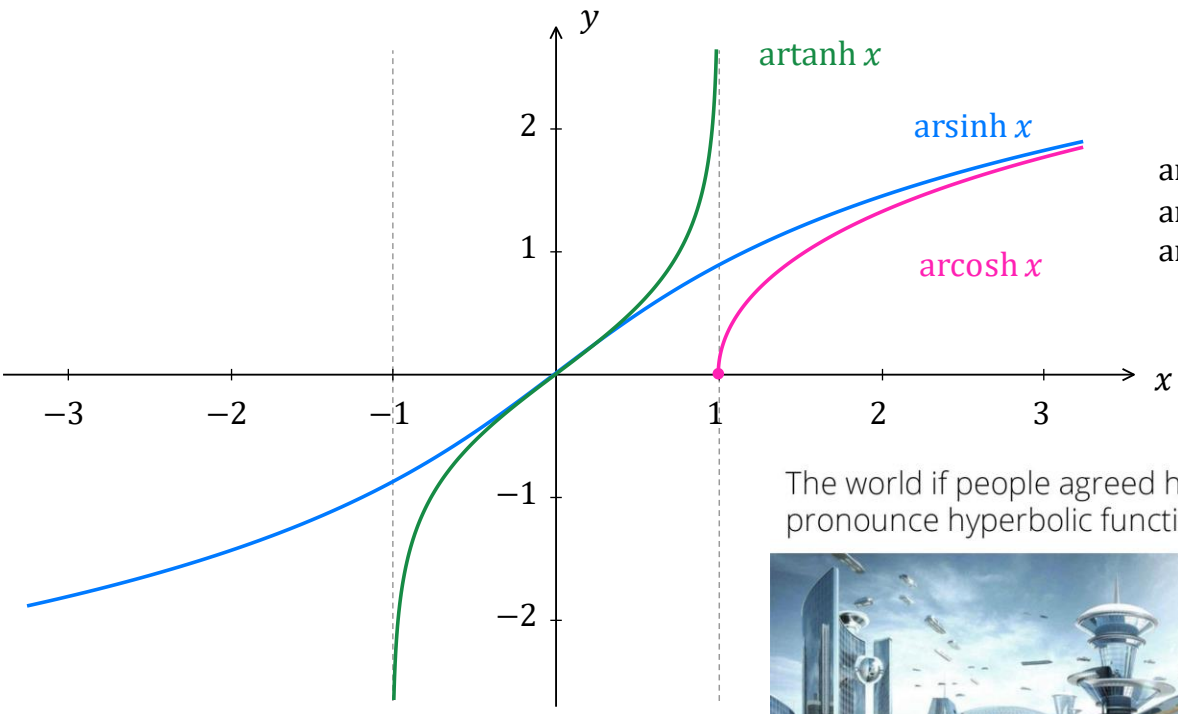
$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$

Umkehrfunktionen auf einen Blick

$$\operatorname{Arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \qquad x \in \mathbb{R} \qquad (\operatorname{Arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\operatorname{Arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \qquad x \geq 1 \qquad (\operatorname{Arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x > 1$$

$$\operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \qquad -1 < x < 1 \qquad (\operatorname{Artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$$



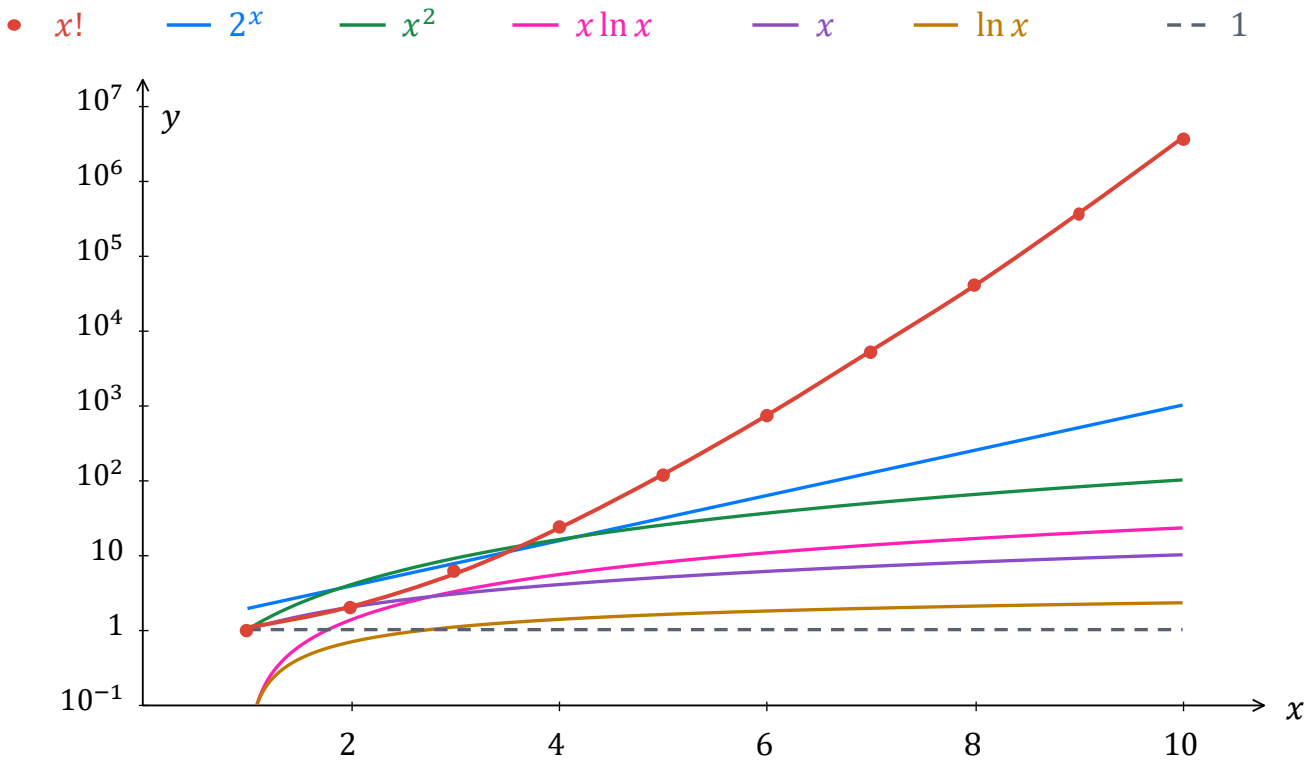
arsinh : $x \in \mathbb{R}$
arcosh : $x \geq 1$
artanh : $-1 < x < 1$

The world if people agreed how to pronounce hyperbolic functions



SC 4 (I) Welche der untenstehenden Funktionen g ist eine Asymptote von $f(x) = \cosh(2x)$ wenn $x \to +\infty$?

(A) $g(x) = \frac{e^x}{2}$
(B) $g(x) = e^x$
(C) $g(x) = \frac{e^{2x}}{2}$
(D) $g(x) = e^{2x}$



Grössenordnungen

Kleines o: im Vergleich verschwindend klein

«f(x) wächst langsamer als g(x)»

$$f(x) = o(g(x)) \text{ für x } \to \text{ a} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x} \longrightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = o(x^3)$$

Es gilt:

$$x^a = o(e^{bx}) \text{ für x } \to \infty \text{ und a, b} > 0$$

$$e^{-bx} = o(x^{-a}) \text{ für x } \to \infty \text{ und a, b} > 0$$

$$(\ln(x))^c = o(x^a) \text{ für x } \to \infty \text{ und a, c} > 0$$

$$(\ln(x))^c = o(x^{-a}) \text{ für x } \to 0^+ \text{ und a, c} > 0$$

$$x^a = o(x^b) \text{ für x } \to \infty \text{ und } 0 < \text{a} < \text{b}$$

$$\ln\big(\ln(\text{x})\big) = o(\ln(\text{x})) \text{ für x } \to \infty$$

$$x^a = o(x^a \ln(\text{x})) \text{ für x } \to \infty$$

Grosses O: durch ein festes Vielfaches begrenzt

$$f(x) = O(g(x)) \text{ für x } \to \text{ a} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq A \in \mathbb{R}$$

Bsp.: Wachstum vergleichen

Für $x \to +\infty$ Ordne die folgende Funktion der Grösse nach:

$f_1(x) = x^3$ $f_2(x) = e^{5x+1}$ $f_3(x) = \ln(e^{x^{1/4}} - 2)$ $f_4(x) = \sqrt{x}$

$$e^{5x+1} \gg x^3 \gg \sqrt{x} \gg \ln(e^{x^{\frac{1}{4}}} - 2)$$

SC 12 (II) Welche der folgenden vier Aussagen über Grössenordnungen ist richtig?

(A) $\ln x = o(\sqrt{x^2 + x})$ für $x \to \infty$

(B) $\ln x = o(\ln(x^2))$ für $x \to \infty$

(C) $\sqrt{x^2 + x} = o(\ln x)$ für $x \to \infty$

(D) $\ln(x^2) = o(\ln x)$ für $x \to \infty$

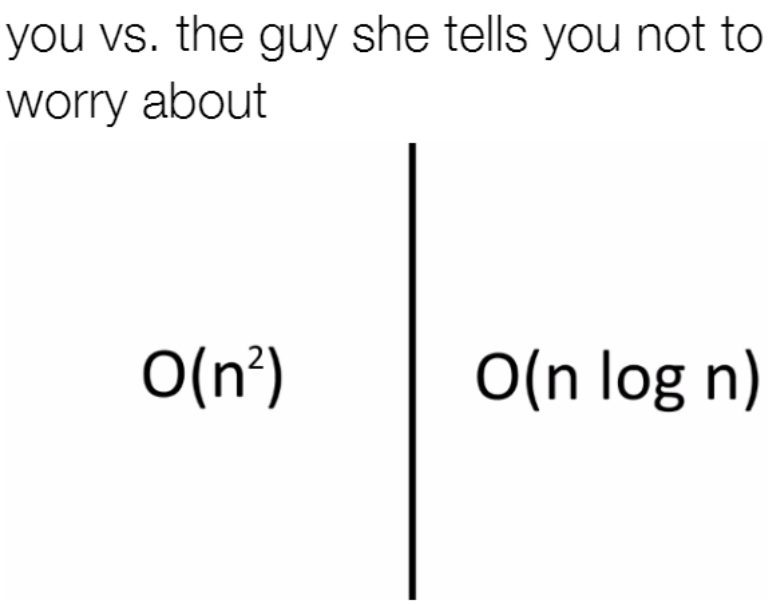
SC 6 (II) Welche der folgenden Aussagen über Grössenordnungen von Funktionen ist richtig, wenn $x \to 0^+$?

(A) $x^{-2} = o(e^x)$

(B) $e^{1/x} = o(x^{-2})$

(C) $e^{-1/x} = o(x^4)$

(D) $x^{-3} = o\left(e^{-1/x}\right)$



Tipps zur Serie 7

Aufgabe 1a: Gebiet

Setze $z = x + iy$ ein. Mache den Nenner reell und ergänze zum Quadrat. Beim strengen $>$ gehört der Rand nicht dazu.

$$\overline{iz} = -y - ix$$

Aufgabe 1b: Nullstellen und Polarform

Prüfe zuerst $p(-1)$. Nutze dann die Paarregel mit $z_{1,2} = -1 \pm iy$. Multipliziere das Paar aus.

$$(z - z_1)(z - z_2) = (z + 1)^2 + y^2$$

Teile durch diesen Faktor oder vergleiche Koeffizienten. Für die Polarform: Betrag, Winkel und Quadrant prüfen.

Aufgabe 1c: Gehört der Punkt dazu?

Setze jede gefundene Nullstelle in die Gebietsbedingung aus 1a ein.

Aufgabe 2.1: Reelle Nullstellen

Wie oft nimmt die streng wachsende Funktion x^5 den Wert -1 an? Prüfe auch, ob die Nullstelle mehrfach ist.

Aufgabe 2.2 / 2.3: Richtig zählen

Der Grad zählt mit Vielfachheit. Nicht-reelle Nullstellen kommen bei reellen Koeffizienten paarweise.

Aufgabe 2.4: Beispiele bauen

Baue das Polynom aus linearen Faktoren und Faktoren $x^2 + 1$. Die Grade müssen zusammen fünf ergeben.

Tipps zur Serie 7

Aufgabe 3a / 3b: Exponentialformen

Ersetze $\sinh$ und $\cosh$ durch ihre Definitionen. Bei 3b ist die rechte Seite der bequemere Start.

$$e^x e^{-x} = 1, \qquad e^x e^y = e^{x+y}$$

Aufgabe 3.1: Halber Winkel

Quadriere $e^{x/2} + e^{-x/2}$. Beim Kreuzterm hilft $e^{x/2}e^{-x/2} = 1$.

Aufgabe 3.2: Arcosh

Setze $x = \cosh y$ und $u = e^y$. Löse die quadratische Gleichung. Wegen $y \geq 0$ brauchst du $u \geq 1$.

Aufgabe 3.3 / 3.4: Ableiten

Kettenregel auf die Logarithmusform anwenden. Im Zähler zusammenfassen und kürzen. Bei Arcosh gilt für die Ableitung $x > 1$.

Aufgabe 4a / 4e: Logarithmen

Produkte und Potenzen vereinfachen. Konstante Faktoren ändern die Wachstumsstufe nicht.

$$\ln(\ln(x^2)) = \ln 2 + \ln(\ln x), \qquad x > 1$$

Aufgabe 4b: Was steckt im Logarithmus?

$$\ln(e^x - x) = x + \ln(1 - xe^{-x})$$

Was macht der zweite Term, wenn der Input immer grösser wird?

Aufgabe 4c / 4d / 4f: Einordnen

Vergleiche die Exponenten der Potenzen. Die Exponentialfunktion wächst langfristig am schnellsten.

Bei Unsicherheit: Quotient bilden. In Aufgabe 4 gilt $x \to +\infty$.