

Analysis 1 - Übung 5

Fehlerrechnung

Wir messen eine Grösse mit Messfehler. Mit dieser gemessenen Grösse berechnen wir eine Grösse. Wie wirkt sich der Messfehler auf aus?

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Für kleine hilft die Tangente:

$$\Delta f \approx df = f'(x) \cdot \Delta x$$

Fehler

$$E_f = \approx$$

Fehler

$$r_f = \approx, \quad f(x) \neq 0$$

Absolut:

Relativ: wie viel

? Für Prozent:

Bsp. Rechteck

Nur a wird gemessen. b ist bekannt.

$$\frac{A(a)}{\Delta A} = \left(\frac{A(a)}{A} \right) - =$$

$$\frac{|\Delta A|}{A} = = (a, b \neq 0)$$

$$a = \quad b = \quad |\Delta a| =$$

$$E_A = \quad r_A = \approx$$

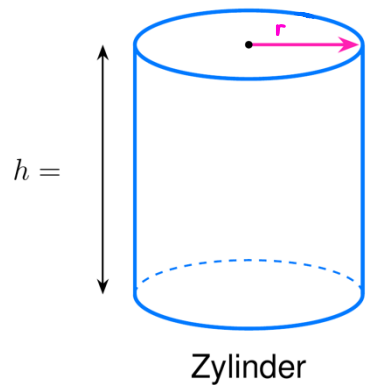


Bsp. Zylinder und Quader

Zylinder: Nur der Radius schwankt

$$\frac{|\Delta r|}{r} = 1\%, \quad h = 1 \text{ fest}$$

$$V(r) = \quad \Rightarrow \quad V'(r) =$$



$$\frac{|\Delta V|}{V} \approx \frac{V'(r) \Delta r}{V(r)} = \frac{2\pi r h \Delta r}{\pi r^2 h} = \frac{2\Delta r}{r} = 2\%$$

Radius zum $\Rightarrow$ ungefähr relativer Fehler.

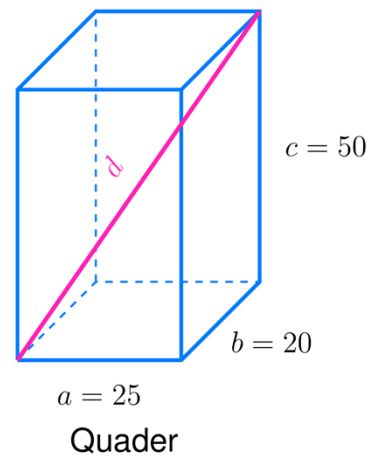
Quader: Nur eine Seite schwankt

$$a = \quad b = \quad c = \quad |\Delta a| =$$

$$d(a) = \quad \Rightarrow \quad d'(a) = \frac{1}{a} = \frac{1}{25} = 0.04$$

$$d = \quad \approx$$

$$E_d \approx - \quad = - \quad \cdot \quad \approx$$



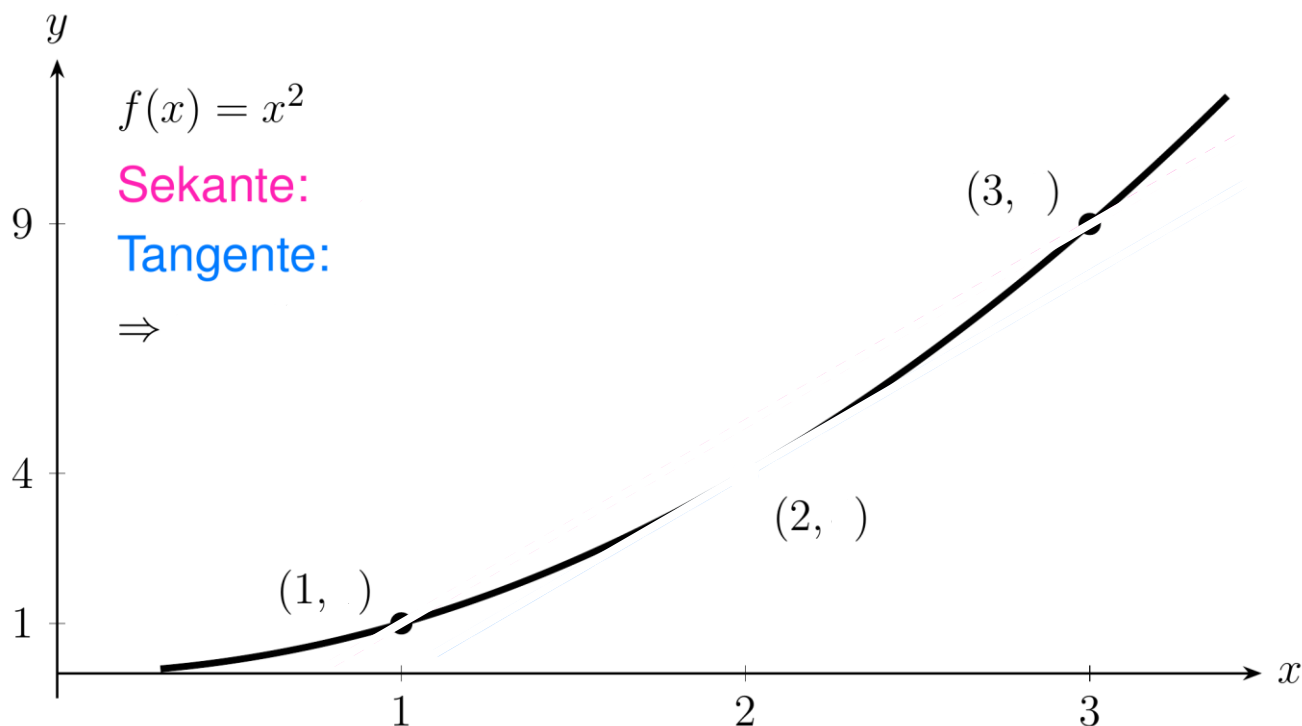
$$r_d \approx \frac{1}{0.04} = 25 \approx$$

Mittelwertsatz

Sekante: Irgendwo dazwischen passt eine

Falls f auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar ist:

$$a < b \Rightarrow \exists c \in (a, b): f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Bsp.

$$f(x) = x^2, \quad [a, b] = [\quad]$$

$$m_{\text{Sekante}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} =$$
$$f'(c) = \quad = \quad \Rightarrow \quad =$$

Satz von Rolle

Gleiche Höhe $\Rightarrow$ irgendwo waagrecht. Dieselben Bedingungen!

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b): f'(c) = 0$$

Extremum oder Wendepunkt?

$$f' > 0:$$

$$f' < 0:$$

Waagrecht ist erst ein Kandidat!

$$f'(x_0) = 0$$

Falls f zweimal stetig differenzierbar ist:

$f'(x_0) = 0 \ \& \ f''(x_0) < 0$	lokales Maximum
$f'(x_0) = 0 \ \& \ f''(x_0) > 0$	lokales Minimum
$f'(x_0) = 0 \ \& \ f''(x_0) = 0$	Keine Aussage

Alternativ: Vorzeichenwechsel von f'' prüfen. f sei bei x_0 stetig, daneben differenzierbar.

$$+ \rightarrow -:$$

$$- \rightarrow +:$$

Krümmung

$$f' = 0 \ \& \ f'' = 0:$$

$$f' = 0 \ \& \ f'' \neq 0:$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt

$\Rightarrow$ Wendepunkt

$$f(x) = x^3$$

$$f(x) = x^4$$

$$f(x) = x^3 + x$$

$$f'' < 0$$

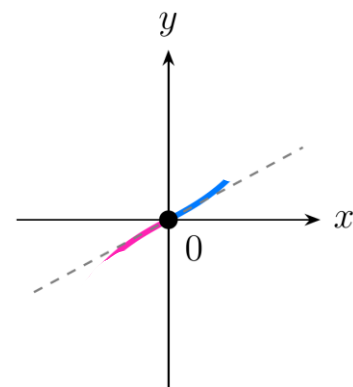
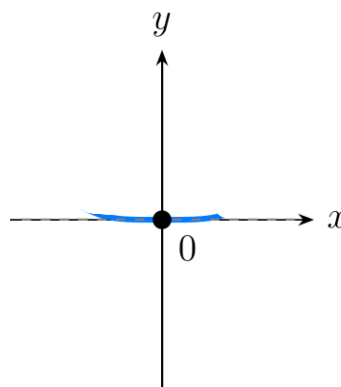
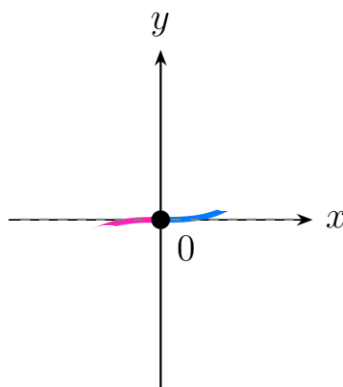
$$f'' = 0$$

$$f'' = 0$$

$$f'' = 0$$

$$f'' > 0$$

$$f'' = 0$$



Sattelpunkt

Kein Wendepunkt

Wendepunkt

$$f'(0) = 0$$

$$f'(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$f(x)$	$f''(x)$	Bei $x = 0$
x^3	$:- \rightarrow +$	
x^4	$:+ \rightarrow +$	
$x^3 + x$	$:- \rightarrow +$	

Extremalstellen bestimmen

Stetiges f auf $[a, b]$: , Stellen und prüfen.
Dann Werte

Bsp. 1

$$f(x) = x^3 - x, \quad D_f = \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$f(\quad) = \quad, \quad f(\quad) = \quad$$

$$f'(x) = \quad = \quad \Rightarrow x = \quad$$

$$D_f, \quad f\left(\quad\right) = \quad$$

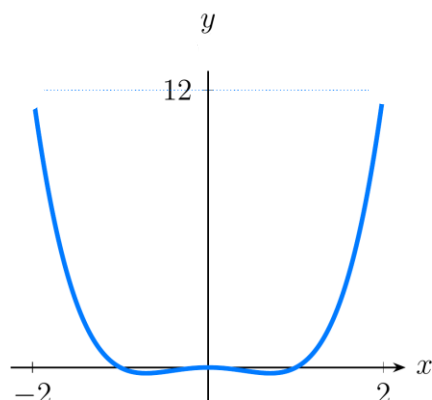
$$\max(f) = \quad \text{bei } x = \quad, \quad \min(f) = \quad \text{bei } x = \quad$$

Bsp. 2

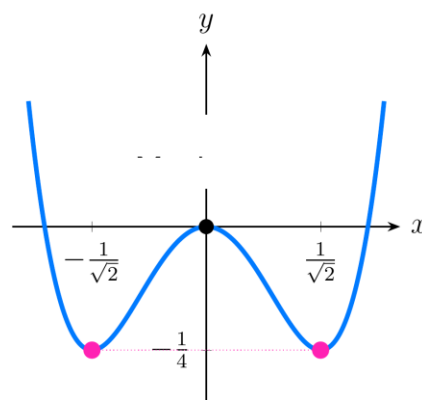
$$g(x) = x^4 - x^2, \quad D_g = [-2, 2]$$

$$g'(x) = (\quad) = \quad \Rightarrow x = \quad,$$

x	-2	$-1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{2}$	2
$g(x)$			0		



Intervall $[-2, 2]$



$$\max(g) = \quad \text{bei } x = \quad, \quad \min(g) = \quad \text{bei } x = \quad$$

Lokal: nur die , Global: alle Stellen. Bei $x = 0$ also nur lokal!

Bernoulli-L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$

oder

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \text{und} \lim_{x \rightarrow a} g(x) =$$

Bsp. 1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{2x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{2x} =$$

$$\mathbb{N} = \text{Zahlen} = \{ \quad \} \quad \mathbb{N} = \mathbb{N} = \{ \quad \}$$

$$\mathbb{Z} = \text{Zahlen} = \{ \quad \}$$

$$\mathbb{Q} = \text{Zahlen} = \{ \quad : \quad , \quad \text{sind} \quad \text{und} \quad \}$$

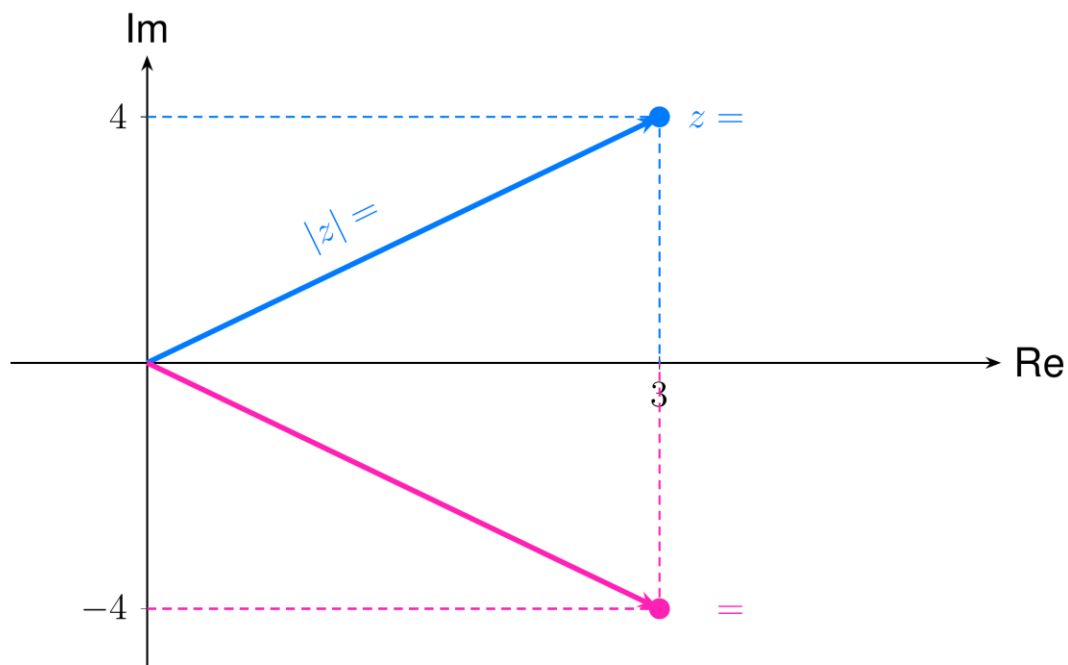
$$\mathbb{R} = \text{Zahlen} = \text{Zahlen die auf der} \quad \text{liegen}$$

$$\mathbb{C} = \text{Zahlen} = \{ \quad = \quad + \quad : \quad \text{sind} \quad \text{und} \quad = \quad \text{oder} \quad = \quad \}$$

$$x^2 = -1 \Rightarrow x = \quad =$$

$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Re}(z) = \quad \operatorname{Im}(z) = \quad (\text{nicht}$$



Realteil:

Imaginärteil:

Addieren / Subtrahieren

Gleiches zu Gleichem.

$$(a + bi) \pm (c + di) = (\quad \pm \quad) + (\quad \pm \quad)i$$

$$z_1 = 3 + i, \quad z_2 = 1 + 2i$$

$$z_1 + z_2 = (\quad + \quad) + (\quad + \quad)i = \quad i$$

$$z_1 - z_2 = (\quad - \quad) + (\quad - \quad)i = \quad i$$

Rechnen mit komplexen Zahlen

Multiplizieren

Ausmultiplizieren. Dann $i^2 = -1$ einsetzen.

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$(3 + i)(1 + 2i) = + + + = + = +$$

Komplex konjugierte

Vorzeichen vor i wechseln oder Spiegelung an der reellen Achse.

$$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$$

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$$

Dividieren

Mit dem konjugierten Nenner erweitern!

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}, \quad c + di \neq 0$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = + i$$

$$\frac{3 + i}{1 + 2i} = \frac{(3 + i)(\quad)}{(1 + 2i)(\quad)}$$

$$= \underline{\hspace{2cm}}$$

$$= \underline{\hspace{2cm}} =$$

Check: $(1 - i)(1 + 2i) = \quad =$

Tips zur Serie 5:

Aufgabe 1: Bernoulli L'Hopital → Immer zuvor prüfen ob die Bedingungen es erlauben

Aufgabe 2: Extremalstellen untersuchen → $f'(x)$ → $f''(x)$ → ...

Randpunkte beachten

Schreibt organisiert → Überblick ist alles

Aufgabe 3: Grundformel $m(t) = m_0 \exp(-at)$ immer aufschreiben

Nach gesuchter Grösse auflösen bevor du differenzierst

Differential bei Messfehler nutzen

Aufgabe 4: Differentialquotient erinnern

Mittelwertsatz: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\dots) \cdot (x_2 - x_1)$

Aufgabe 5: Absoluter Fehler bspw: Δm

Relativer Fehler bspw: $\Delta m/m$

"Your homework isn't that
complex"

Homework:

$\sqrt{-1}$