

Analysis 1 - Übung 5Fehlerrechnung

Wir messen eine Grösse x mit Messfehler Δx . Mit dieser gemessenen Grösse x berechnen wir eine Grösse $f(x)$. Wie wirkt sich der Messfehler Δx auf f aus?

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Für kleine Δx hilft die Tangente:

$$\Delta f \approx df = f'(x) \cdot \Delta x$$

Absoluter Fehler

$$E_f = |\Delta f| \approx |f'(x)| \cdot |\Delta x|$$

Relativer Fehler

$$r_f = \frac{E_f}{|f(x)|} \approx \frac{|f'(x)| \cdot |\Delta x|}{|f(x)|}, \quad f(x) \neq 0$$

Absolut: wie viel?

Relativ: wie viel im Verhältnis? Für Prozent: $\times 100$.

Bsp. Rechteck

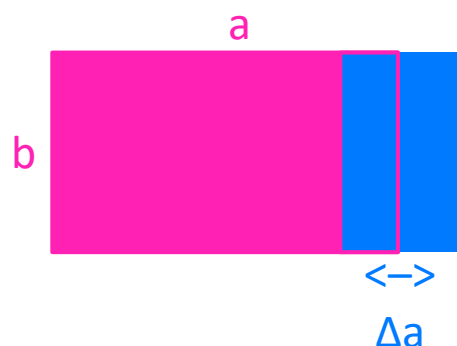
Nur a wird gemessen. b ist bekannt.

$$\begin{aligned} A(a) &= a \cdot b \\ \Delta A &= (a + \Delta a)b - a \cdot b = b \cdot \Delta a \end{aligned}$$

$$\frac{|\Delta A|}{A} = \frac{b|\Delta a|}{a \cdot b} = \frac{|\Delta a|}{a} \quad (a, b > 0)$$

$$a = 12 \text{ m}, \quad b = 3 \text{ m}, \quad |\Delta a| = 0,1 \text{ m}$$

$$E_A = 0,3 \text{ m}^2, \quad r_A = \frac{0,1}{12} \approx 0,833\%$$

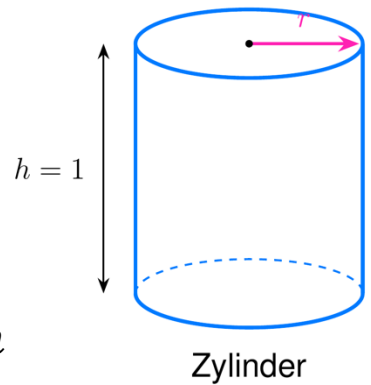


Bsp. Zylinder und Quader

Zylinder: Nur der Radius schwankt

$$\frac{|\Delta r|}{r} = 1\%, \quad h = 1 \text{ fest}$$

$$V(r) = \pi r^2 h \Rightarrow V'(r) = 2\pi r h$$



$$\frac{|\Delta V|}{V} \approx \frac{2\pi r h |\Delta r|}{\pi r^2 h} = 2 \frac{|\Delta r|}{r} = 2\%$$

Radius zum Quadrat $\Rightarrow$ ungefähr doppelter relativer Fehler.

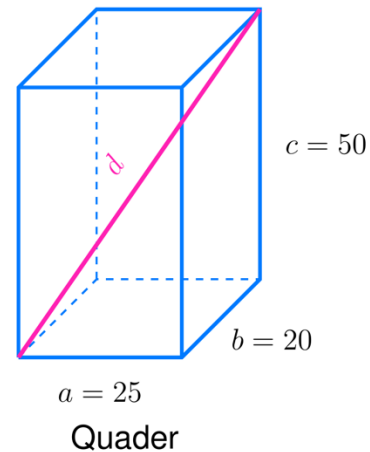
Quader: Nur eine Seite schwankt

$$a = 25, \quad b = 20, \quad c = 50, \quad |\Delta a| = 1$$

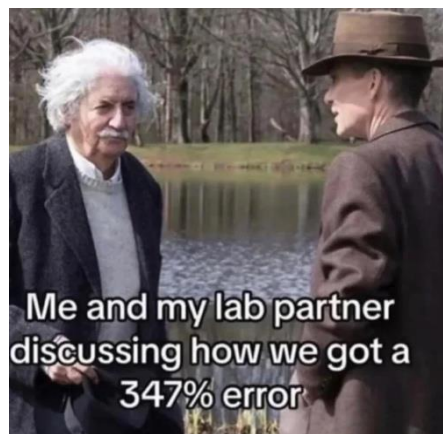
$$d(a) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow d'(a) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{a}{d}$$

$$d = \sqrt{3525} \approx 59,37$$

$$E_d \approx \frac{a}{d} |\Delta a| = \frac{25}{\sqrt{3525}} \cdot 1 \approx 0,421$$



$$r_d \approx \frac{a|\Delta a|}{d^2} = \frac{25}{3525} \approx 0,709\%$$

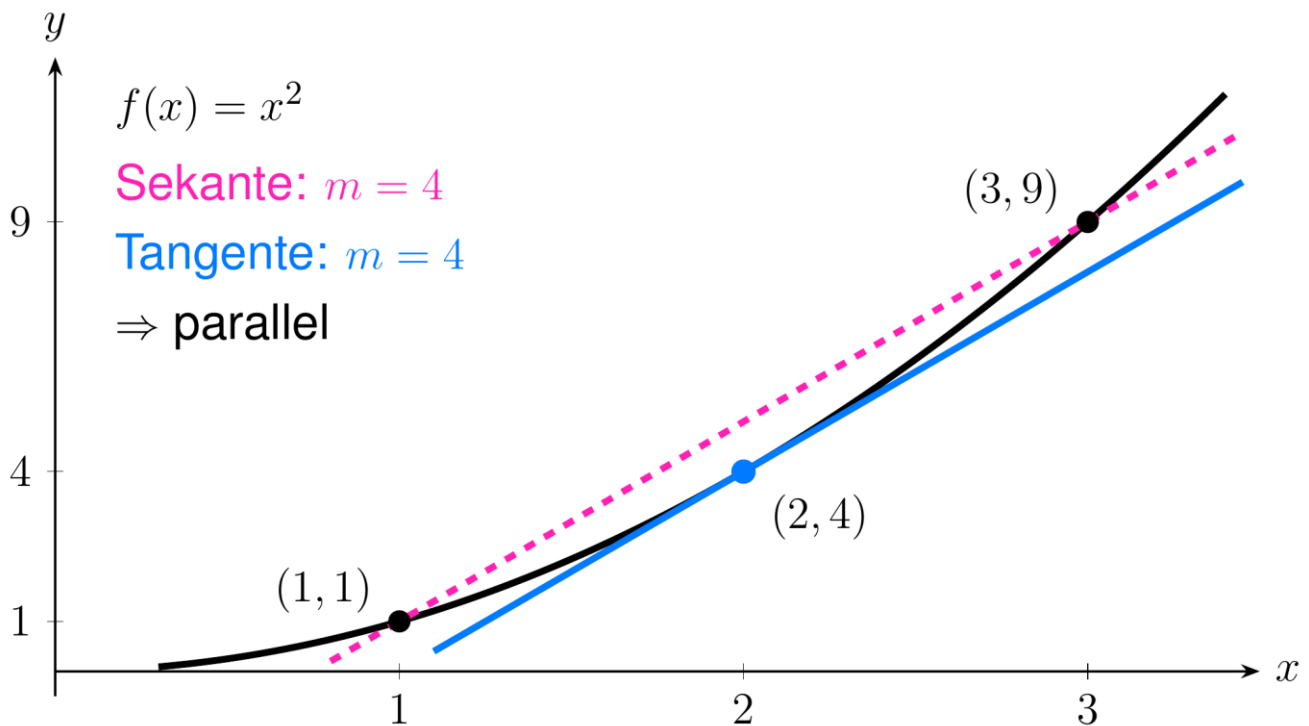


Mittelwertsatz

Sekante: mittlere Steigung. Irgendwo dazwischen passt eine Tangente.

Falls f auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar ist:

$$a < b \Rightarrow \exists c \in (a, b): f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Bsp.

$$f(x) = x^2, \quad [a, b] = [1, 3]$$

$$\begin{aligned} m_{\text{Sekante}} &= \frac{9 - 1}{3 - 1} = 4 \\ f'(c) = 2c &= 4 \Rightarrow c = 2 \end{aligned}$$

Satz von Rolle

Gleiche Höhe $\Rightarrow$ irgendwo waagrecht. Dieselben Bedingungen!

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b): f'(c) = 0$$

Extremum oder Wendepunkt?

$$f' > 0: \nearrow$$

$$f' < 0: \searrow$$

Waagrecht ist erst ein Kandidat!

$$f'(x_0) = 0$$

Falls f zweimal stetig differenzierbar ist:

$f'(x_0) = 0$ & $f''(x_0) > 0$	lokales Minimum
$f'(x_0) = 0$ & $f''(x_0) < 0$	lokales Maximum
$f'(x_0) = 0$ & $f''(x_0) = 0$	noch keine Entscheidung

Alternativ: Vorzeichenwechsel von f' prüfen. f sei bei x_0 stetig, daneben differenzierbar.

$+\rightarrow -$: Maximum

$-\rightarrow +$: Minimum

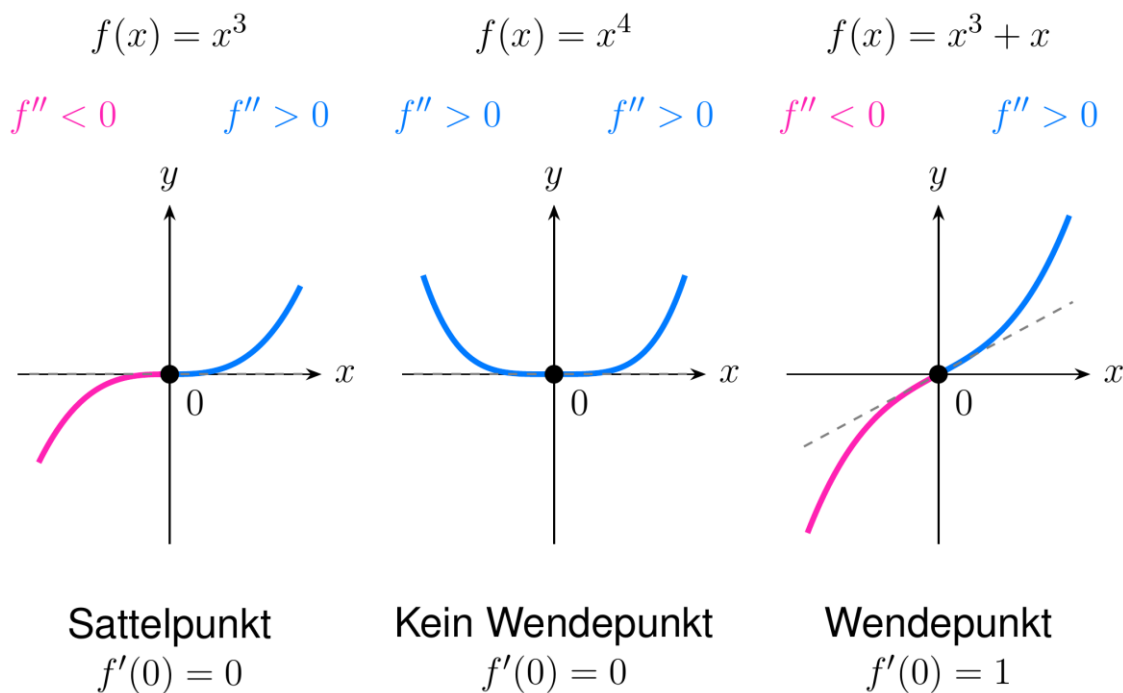
Krümmung

$$f' = 0 \text{ \& } f'' > 0: \text{konvex}$$

$$f' = 0 \text{ \& } f'' < 0: \text{konkav}$$

Waagerechte Tangente dazu $\Rightarrow$ Sattelpunkt

Krümmung wechselt $\Rightarrow$ Wendepunkt



$f(x)$	$f''(x)$	Bei $x = 0$
x^3	$6x: -\rightarrow +$	Sattelpunkt
x^4	$12x^2: +\rightarrow +$	kein Wendepunkt
$x^3 + x$	$6x: -\rightarrow +$	Wendepunkt, $f'(0) = 1$

Extremalstellen bestimmen

Stetiges f auf $[a, b]$: Ränder, nicht ableitbare Stellen und $f' = 0$ prüfen.
Dann Werte vergleichen.

Bsp. 1

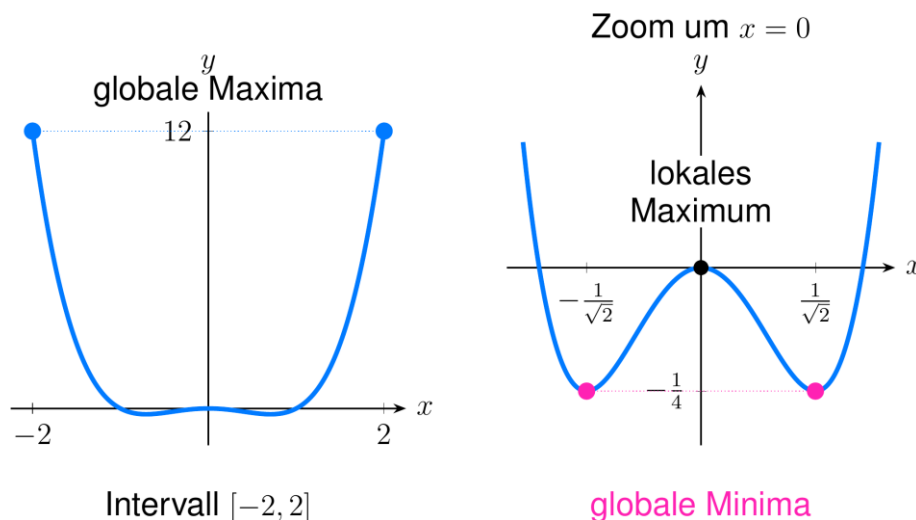
$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 - x, & D_f &= \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \\f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{3}{8}, & f(1) &= 0 \\f'(x) &= 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \\-\frac{1}{\sqrt{3}} &\notin D_f, & f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= -\frac{2}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

$$\max(f) = \frac{3}{8} \text{ bei } x = -\frac{1}{2}, \quad \min(f) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ bei } x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Bsp. 2

$$\begin{aligned}g(x) &= x^4 - x^2, & D_g &= [-2, 2] \\g'(x) &= 2x(2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

x	-2	$-1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{2}$	2
$g(x)$	12	$-1/4$	0	$-1/4$	12



$$\max(g) = 12 \text{ bei } x = \pm 2, \quad \min(g) = -\frac{1}{4} \text{ bei } x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Lokal: nur die Umgebung.

Global: alle erlaubten Stellen. Bei $x = 0$ also nur lokal!

Bernoulli-L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

oder

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \text{ und } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$$



Bsp. 1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2xe^{2x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{2x} = \infty$$

$\mathbb{N}$ = natürliche Zahlen = $\{0, 1; 2; 3; \dots\}$ $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1; 2; 3; \dots\}$

$\mathbb{Z}$ = ganze Zahlen = $\{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots\}$

$\mathbb{Q}$ = rationale Zahlen = $\{p/q: p, q \text{ sind } \mathbb{Z} \text{ und } q \neq 0\}$

$\mathbb{R}$ = reelle Zahlen = alle Zahlen die auf der Zahlengerade liegen

$\mathbb{C}$ = komplexe Zahlen = $\{z = a - ib: a, b \text{ sind } \mathbb{R} \text{ und } i = \sqrt{-1} \text{ oder } i^2 = -1\}$

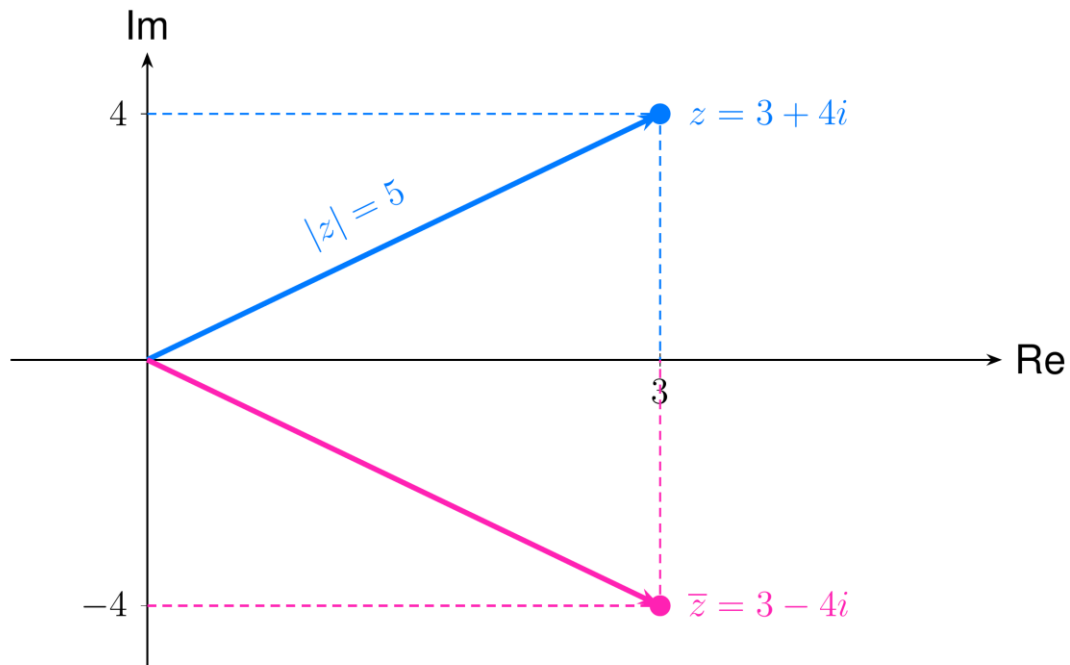
↳ Imaginäre Einheit

Komplexe Zahlen

$$x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i, \quad i^2 = -1$$

$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Re}(z) = a, \quad \operatorname{Im}(z) = b \quad (\text{nicht } bi!)$$



Realteil: rechts/links

Imaginärteil: oben/unten

Addieren / Subtrahieren

Gleiches zu Gleichem.

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

$$z_1 = 3 + i, \quad z_2 = 1 + 2i$$

$$z_1 + z_2 = (3 + 1) + (1 + 2)i = 4 + 3i$$

$$z_1 - z_2 = (3 - 1) + (1 - 2)i = 2 - i$$

Rechnen mit komplexen Zahlen

Multiplizieren

Ausmultiplizieren. Dann $i^2 = -1$ einsetzen.

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$(3 + i)(1 + 2i) = 3 + 6i + i + 2i^2 = 3 + 7i - 2 = 1 + 7i$$

Komplex konjugierte $\bar{z}$

Vorzeichen vor i wechseln oder Spiegelung an der reellen Achse.

$$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$$

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$$

Dividieren

Mit dem konjugierten Nenner erweitern!

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}, \quad c + di \neq 0$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

$$\begin{aligned} \frac{3 + i}{1 + 2i} &= \frac{(3 + i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} \\ &= \frac{3 - 6i + i - 2i^2}{1 - 4i^2} \\ &= \frac{5 - 5i}{5} = 1 - i \end{aligned}$$

Check: $(1 - i)(1 + 2i) = 1 + 2i - i - 2i^2 = 3 + i$

Tips zur Serie 5:

Aufgabe 1: Bernoulli L'Hopital → Immer zuvor prüfen ob die Bedingungen es erlauben

Aufgabe 2: Extremalstellen untersuchen → $f'(x)$ → $f''(x)$ → ...

Randpunkte beachten

Schreibt organisiert → Überblick ist alles

Aufgabe 3: Grundformel $m(t) = m_0 \exp(-at)$ immer aufschreiben

Nach gesuchter Grösse auflösen bevor du differenzierst

Differential bei Messfehler nutzen

Aufgabe 4: Differentialquotient erinnern

Mittelwertsatz: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\dots) \cdot (x_2 - x_1)$

Aufgabe 5: Absoluter Fehler bspw: Δm

Relativer Fehler bspw: $\Delta m/m$

"Your homework isn't that
complex"

Homework:

