

Aufgabe 2d: Warum wird aus dem Maximum ein Minimum?

Gegeben ist ein positives lokales Maximum von f_5 bei $t = -\frac{1}{2}$

Das dürfen wir benutzen, ohne es nochmals zu zeigen.

$$f_5(t) = |\tan(t^2 + t)|, \quad \tilde{f}_5(x) = \frac{1}{f_5\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Wir zeigen: $\tilde{f}_5$ hat bei $x = -2$ ein positives lokales Minimum.

Dafür brauchen wir keine Ableitungen.

1. Der Kehrwert macht aus dem Maximum ein Minimum

Bei positiven Zahlen gilt: Je $\quad$ der $\quad$, desto $\quad$ der $\quad$.

Zum Beispiel: $2 < 4$, aber $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$.

In der Nähe von $t = -\frac{1}{2}$ ist $f_5(t)$ nirgends grösser als am Maximum.

Weil f_5 dort stetig und positiv ist, bleibt sie auch ganz in der Nähe positiv.

$$0 < f_5(t) \leq f_5\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{f_5(t)} \geq \frac{1}{f_5\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

Der Kehrwert ist also genau dort am

Aus dem lokalen Maximum wird ein lokales

2. Warum liegt die neue Stelle bei $x = -2$?

In der neuen Funktion setzen wir $\frac{1}{x}$ in f_5 ein. Dieser Input soll die alte Stelle $-\frac{1}{2}$ treffen:

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x =$$

Auch die Nachbarschaft passt: Ist x nahe bei -2 , dann ist $\frac{1}{x}$ nahe bei $-\frac{1}{2}$. Deshalb gilt dort:

$$\tilde{f}_5(x) = \frac{1}{f_5\left(\frac{1}{x}\right)} \geq \frac{1}{f_5\left(-\frac{1}{2}\right)} = \tilde{f}_5(-2) \quad 0$$

Alle Werte in der Nähe sind also mindestens so gross wie der Wert bei

Genau das bedeutet: **positives lokales Minimum bei $x = -2$.**

$$\underbrace{f_5(t) \mapsto \frac{1}{f_5(t)}} \quad \underbrace{\frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -2}$$

Analysis 1 - Übung 4

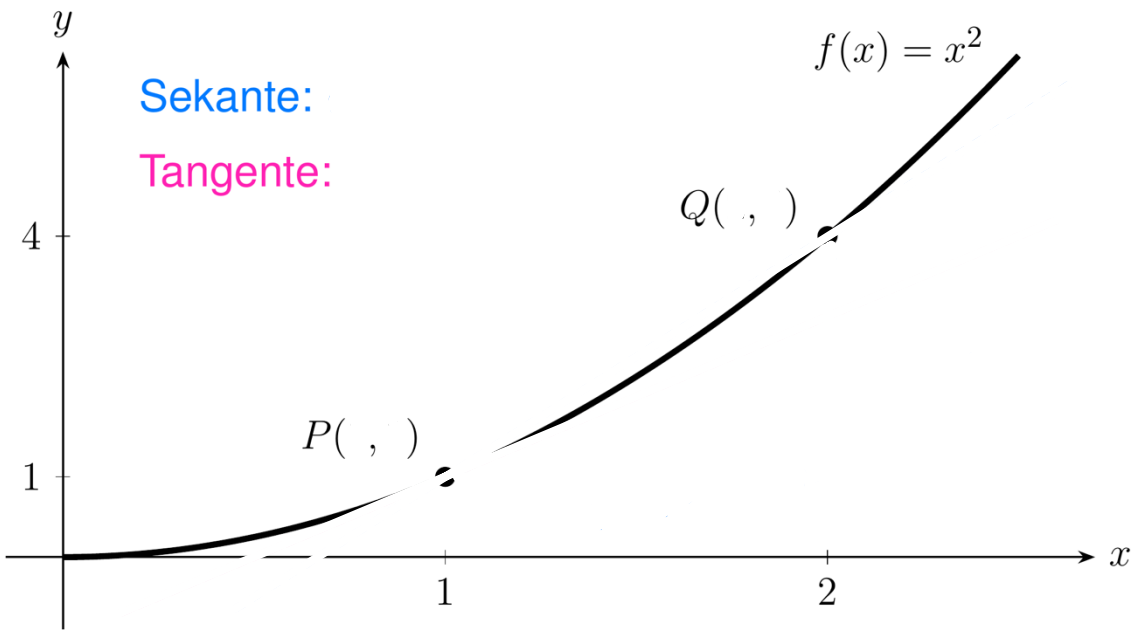


Differenzenquotient

Zeigt die mittlere der Funktion über ein Intervall

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad h \neq 0$$

Sekante: durch Punkte. ist die Änderung in Richtung.



Bsp.

$$f(x) = x^2, \quad x_0 = 1$$
$$\frac{(1 + h)^2 - 1^2}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h$$

h	1	0.5	0.1	0.01
Steigung				

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow m \rightarrow 2$$

Differentialquotient = Differenzenquotient mit $\lim_{h \rightarrow 0}$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Wenn es den $\lim_{h \rightarrow 0}$ in x_0 gibt
(d. h., der $\lim_{h \rightarrow 0}$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ Grenzwert stimmen überein),
so ist die Funktion in x_0 differenzierbar.

Ist die Funktion in x_0 differenzierbar, so ist sie dort automatisch auch

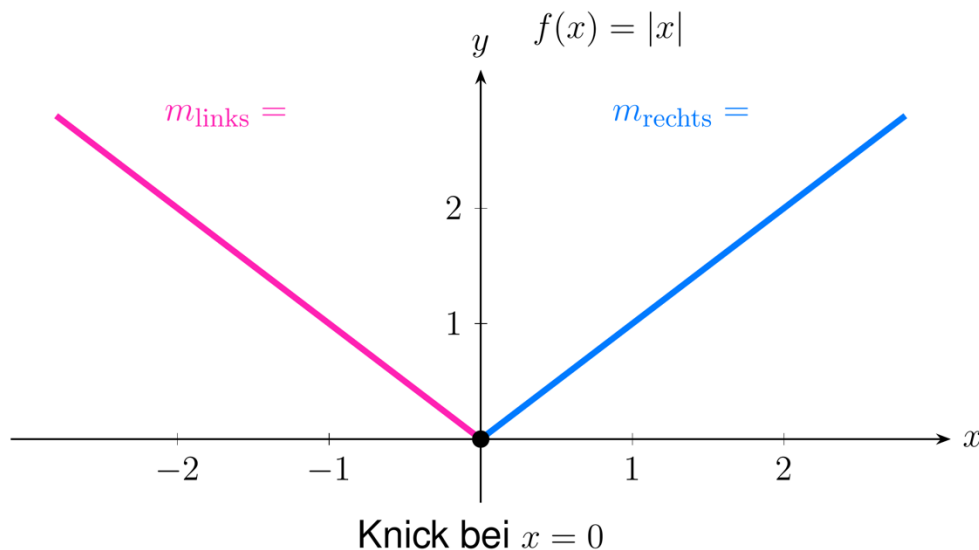
Bsp.

$$f(x) = x^2$$

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

Stetig differenzierbar!



$$f(x) = |x|: \quad \frac{f(\quad) - f(\quad)}{\quad} = \text{---}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \text{---} = \quad = \lim_{h \rightarrow 0^+} \text{---}$$

Knick bei 0: keine Ableitung.

differenzierbar $\Rightarrow$ stetig nicht umgekehrt

Rechenregeln

Hier sind differenzierbar.

Potenzen

Exponent nach vorne, dann um 1 kleiner.

$$(ax^n)' = \quad x^n \quad , \quad (const)' =$$

Für reelle Exponenten: . Polynome gehen auf ganz

$$(6x^7)' = \quad x = \quad x$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = \quad x^{\quad} , \quad x \neq 0$$

Summe / Differenz

Jeden Term einzeln ableiten. Konstanten , Vorfaktoren .

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(3x^5 + 2x - 7)' = \quad , x$$

Produkt

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$f(x) = 4x^5(x^7 - x^2)$$

$$f'(x) = \quad x (\quad) + \quad (\quad x \quad)$$

Quotient und Kette

Quotientenregel

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0$$

Bsp.

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}, \quad x \neq -1$$

$$f'(x) = \frac{(\quad)}{(\quad)} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Kettenregel

ableiten, $\quad$ stehen lassen. Dann mal $\quad$ Ableitung.

$$(g(u(x)))' = g'(u(x)) u'(x)$$

Bsp.

$$f(x) = (3x^2 + 5)^3$$

$$u = \quad \quad u' = \quad \quad g(\quad) = \quad, \quad g'(u) =$$

$$f'(x) = (\quad) = (\quad)$$

Noch ein Bsp.

$$(\tan(g(x)))' = \quad = \left(1 + \tan^2(g(x))\right) g'(x)$$

Hier: $\cos(g(x))$ 0 .Innere Ableitung

Bsp. mit Kettenregel

$$(\sin(5x^3))' = \quad \cdot \quad$$

$$(5e^{x^2})' = \quad \cdot \quad = \quad$$

$$(5\ln(x^2 + 2))' = \quad \text{---}$$

Bsp. mit Produktregel

$$(x^2 \sin(x))' = \quad \cdot \quad + \quad \cdot \quad$$

Bsp. mit Quotientenregel

$$\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)' = \frac{\quad \cdot \quad}{\quad}, \quad x \neq 0$$

Spezialfälle

Winkel im $[\quad]$! Bei einer Verkettung kommt die $\quad$ Ableitung dazu.

Funktion	Ableitung
$\sin(g(x))$	$\cos(g(x)) \cdot g'(x)$
$\cos(g(x))$	$-\sin(g(x)) \cdot g'(x)$
$\tan(g(x))$	$g'(x)/\cos^2(g(x)) = g'(x) + \tan^2(g(x)) \cdot g'(x)$
$\ln(g(x))$	$1/g(x) \cdot g'(x)$
$e^{g(x)}$	$e^{g(x)} \cdot g'(x)$

Beim Tangens: $\cos(g(x)) \neq 0$.

Beim Logarithmus: $g(x) > 0$.

Umkehrfunktion ableiten

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

f auf einem Intervall und ; am $f' \neq 0$.

Bsp.

$$f(x) = x^2 + 2, \quad x \geq 0$$

Nur die rechte Hälfte nehmen! Sonst treffen zwei x denselben Wert.

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y - 2}$$

$$f'(x) = 2x$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2\sqrt{y - 2}}, \quad y > 2$$

Bsp. Tangens

$$f(x) = \tan(x), \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$f^{-1}(y) = \arctan(y), \quad y \in \mathbb{R}$$

$$(\arctan(y))' = \frac{1}{\left(\frac{1}{1+y^2}\right)} = \frac{1}{1+y^2}$$

WICHTIG: f^{-1} ist die Umkehrfunktion, nicht

Lineare Ersatzfunktion

Nahe bei x_0 ersetzen wir die Funktion durch ihre Tangente.

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Bsp.

$$f(x) = x^2, \quad x_0 = 1: \quad f(\quad) = \quad \quad f'(\quad) = \quad$$

$$t(x) = \quad + (x - \quad) = \quad$$

Noch ein Bsp.

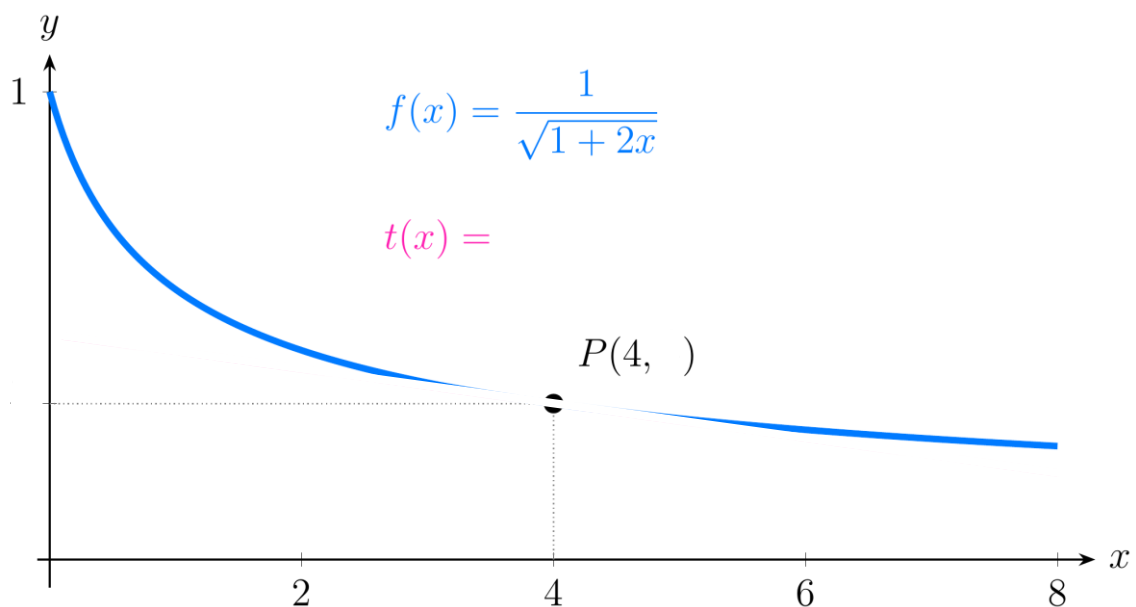
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}} = (1+2x)^{-1/2}, \quad x_0 = \quad$$

Als Potenz schreiben. Dann Kettenregel. Hier: $x >$

$$f'(x) = \quad (1+2x) \quad \cdot \quad = -\frac{1}{(1+2x)}$$

$$f(\quad) = \quad \quad f'(\quad) = \quad$$

$$t(x) = \quad (x - \quad) = \quad$$



Check: $t(x_0) = f(x_0)$ und $t'(x_0) = f'(x_0)$.

Tipps zur Serie 4:

Aufgabe 1: Ableitungsregeln;

Bei g) & h) Differentialquotient anwenden

Aufgabe 2: Gerade = $f(-x) = f(x)$ & Ungerade = $f(-x) = -f(x)$

In Differentialquotient einsetzen

→ Umformen & $f(-x) = f(x)$ bzw $f(-x) = -f(x)$ nutzen

→ Substituiert ab bestimmten Punkt $u = -\Delta x$

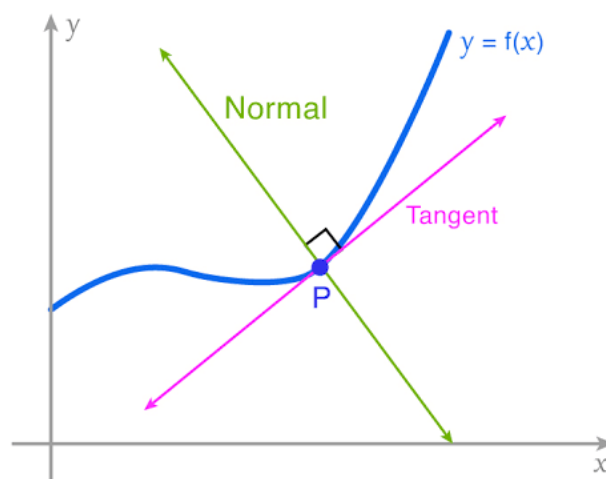
Aufgabe 3: Tangente bilden;

Orthogonale Steigung bilden;

Der Schnittpunkt durch Gleichsetzen beider Tangenten

(Aufpassen: Flüchtigkeitsfehler!!!)

Tangent and Normal Lines



Equations

Tangent line: $y - y_0 = f'(x_0) (x - x_0)$

Normal line: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} (x - x_0)$