

Analysis 1 - Übung 3Stetigkeit

Stetig heisst anschaulich: Wir können den Graphen
An der Stelle darf

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \qquad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Von und kommt heraus.
Dieser Wert muss auch sein.

Am eines Intervalls schauen wir nur von der

Recap: Schreibweise

$$f: \quad \rightarrow \quad , \quad x \mapsto f(x)$$

D: Werte
f(D): -Werte

Menge: Wir sammeln alle , die eine erfüllen.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \quad \} \quad \text{oder z.B.} \quad \{ \quad \}$$

Intervalle: [] = Rand , () = Rand .

$$(a, b): a \quad x \quad b \quad [a, b]: a \quad x \quad b$$

$$(a, b]: a \quad x \quad b \quad [a, b): a \quad x \quad b$$

Bei ist die Klammer immer

Lücken und Sprünge

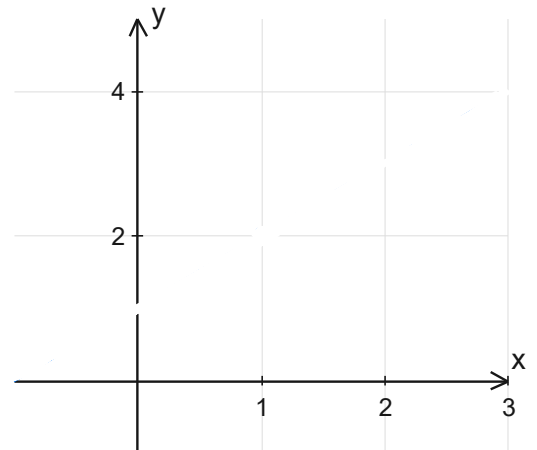
Hebbare Lücke

Hier fehlt nur ein Punkt.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} =$$

Setzen wir , ist das .



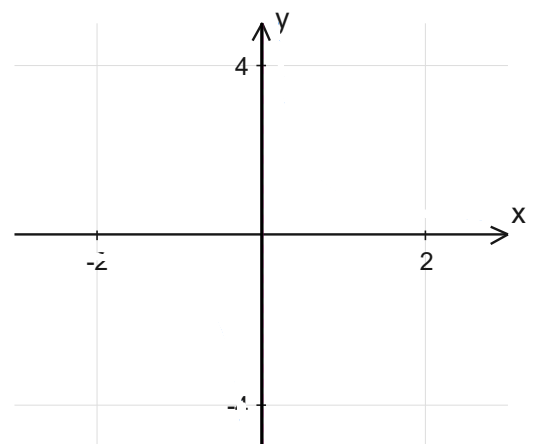
Polstelle

Der Graph läuft nach oder weg.

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

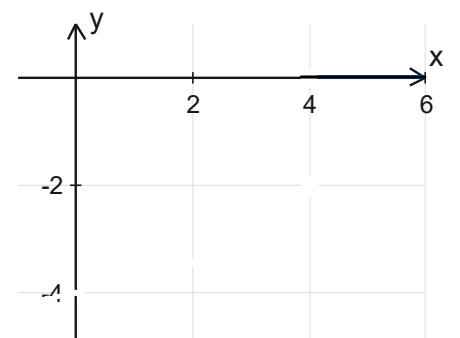
$$x \rightarrow 0^-: g(x) \rightarrow$$

$$x \rightarrow 0^+: g(x) \rightarrow$$



Sprungstelle

$$h(x) = \begin{cases} -2 - \sqrt{4 - x}, & x \leq 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$



Die beiden Seiten passen

Zwischenwertsatz

Stetig

Starten wir unter einer und , müssen wir irgendwo

f stetig auf , zwischen und

$$\Rightarrow \quad \quad \quad \in [a, b] \text{ mit } \quad =$$

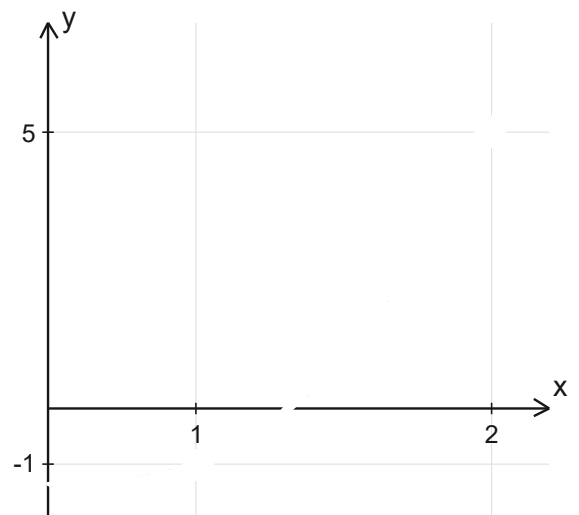
Bsp. 1: Gibt es eine Nullstelle?

$$f(x) = x^3 - x - 1$$

→

$$f(\quad) =$$

$$f(\quad) =$$



Also liegt eine zwischen und

Der sagt: . Er sagt nicht, .

Bsp. 2: Geht auch $h(x) = -\pi$?

Wir nehmen den linken Teil von h aus dem letzten Beispiel $h(x) = \begin{cases} -2 - \sqrt{4-x}, & x \leq 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$
Auf ist dieser Teil stetig.

$$h(\quad) = \quad < \quad < \quad = h(\quad)$$

liegt → es gibt ein passendes in

Graphen verschieben und strecken

Bsp. $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$

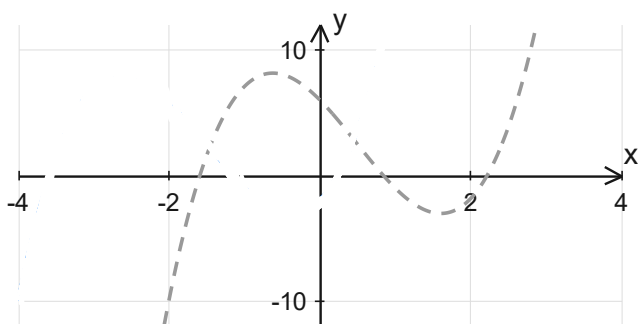
-----: ————:

In x-Richtung verschieben

$$f(x \quad)$$

a 0: a 0:

$p(x \quad)$:

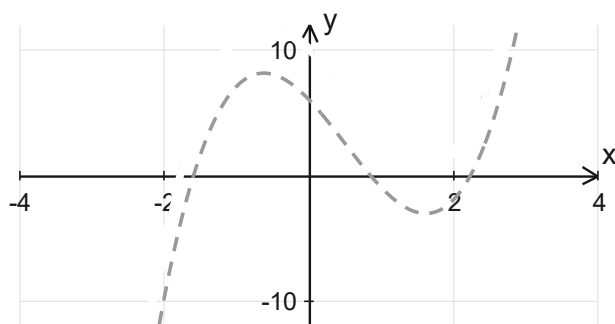


In y-Richtung verschieben

$$f(x)$$

b 0: b 0:

$p(x)$: nach

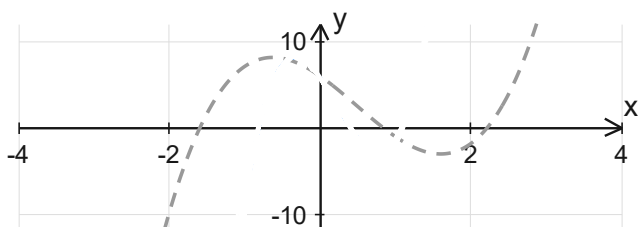


In x-Richtung strecken/stauchen

$$f(\quad x),$$

Für c 0:

$p(\quad x)$:

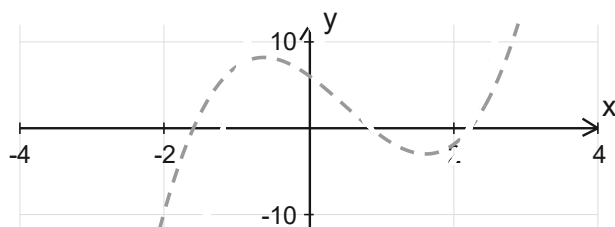


In y-Richtung strecken/stauchen

$$f(x)$$

Für d 0: zusätzlich

$p(x)$:



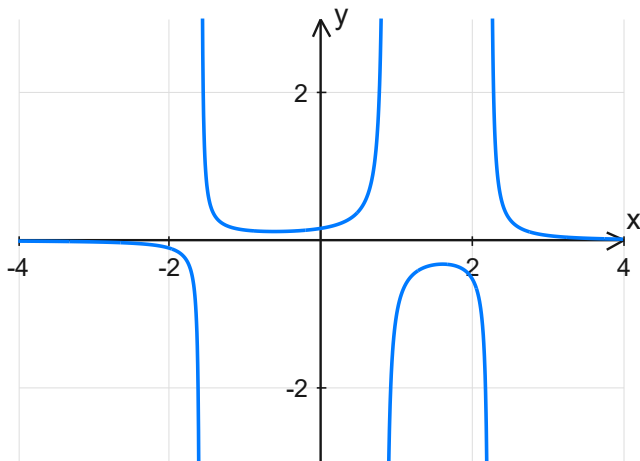
Kehrwert und Umkehrfunktion

Kehrwert der y-Werte

$$\frac{1}{f(x)}$$

Jeder Wert wird zu
Nur möglich, wenn $f(x) \neq 0$.

Bsp. $1/p(x)$

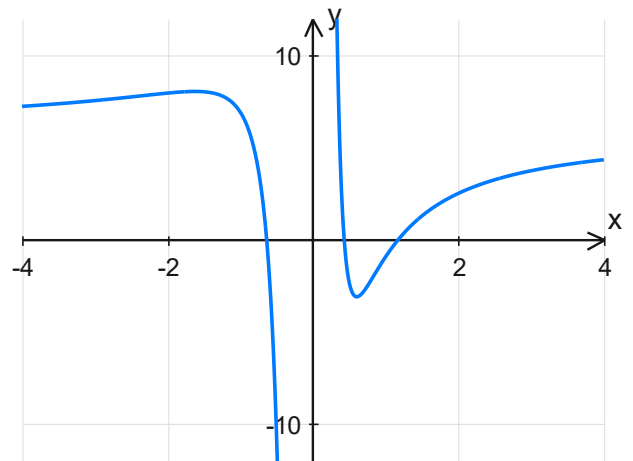


Kehrwert im x einsetzen

$$f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Erst $\frac{1}{x}$ rechnen, dann anwenden.
 $x \neq 0$ und $\frac{1}{x}$ muss in D

Bsp. $p(1/x)$



$\neq$ im

Umkehren: Welches hat diesen Wert geliefert?

$$x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \text{ oder } x = -3$$

Möglichkeiten. So können wir

zurückrechnen.

$$x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

Injektiv, surjektiv, bijektiv

D =

Z =

Injektiv

Kein Wert wird von verschiedenen getroffen.

$$f(x) = 2x + 1$$

$$g(x) = x^2: \quad g(\quad) = g(\quad) =$$

x^2 auf $\mathbb{R}$ ist also

Graph-Test:

trifft

einmal.

Zum Rechnen: $f(\quad) = f(\quad) \Rightarrow$ =

Surjektiv

Jeder Wert im wird getroffen.

$$x^3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$e^x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

e^x ist

und

werden erreicht.

Graph-Test:

trifft

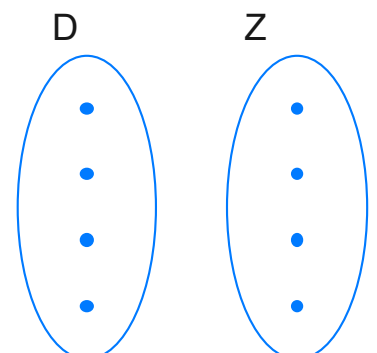
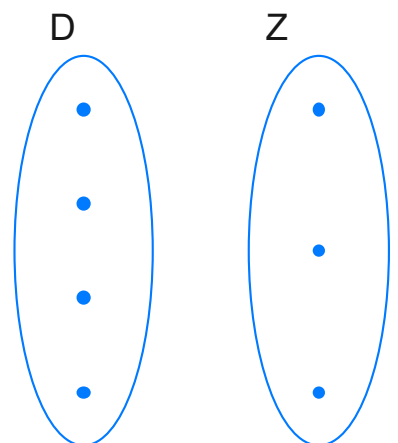
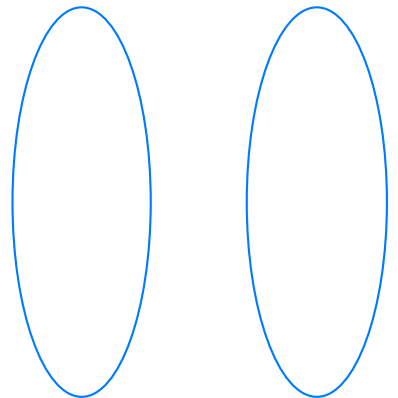
einmal.

Bijektiv

+ = bijektiv

Jeder Zielwert wird einmal getroffen.

Dann können wir eindeutig zurückrechnen.



Umkehrfunktion bestimmen

Wir gehen : Aus dem wird wieder der .

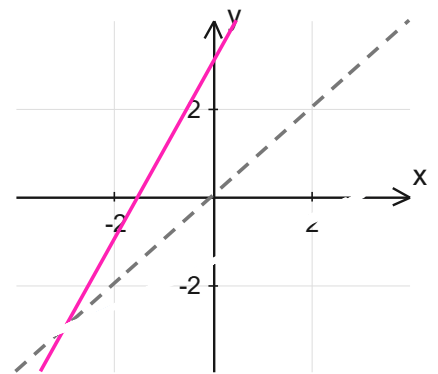
$$y = f(x) \rightarrow \text{nach } x \text{ auflösen} \rightarrow$$

Bsp. 1 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$y = 2x + 3 \Rightarrow x = \frac{y-3}{2}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

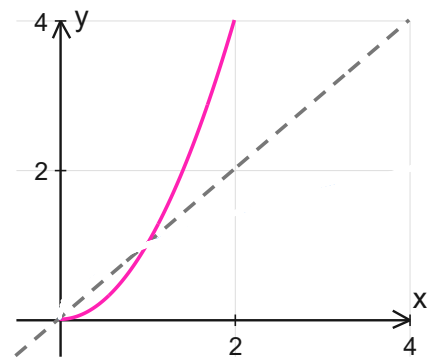
f f^{-1} Spiegelung an $y = x$



Bsp. 2 $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$

$$y = x^2, \quad x \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt{y}$$

$$g^{-1}(y) = \sqrt{y}, \quad x \geq 0$$

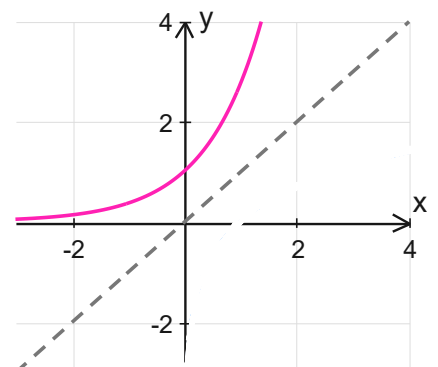


Bsp. 3 $h: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$

$$y = e^x \Rightarrow x = \ln y$$

$$h^{-1}(y) = \ln y, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$h^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$



Umkehrfunktion: weitere Beispiele

Bsp. 4: Bruchfunktion

$$y = \frac{x-1}{x+2}, \quad y: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y = \frac{x-1}{x+2}$$

×

$$=$$

$$=$$

Alle auf eine Seite.

$$=$$

ausklammern.

$$= \frac{\quad}{\quad}$$

÷ \quad, also

$$=$$

$$, \quad x \neq -2$$

$$y^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

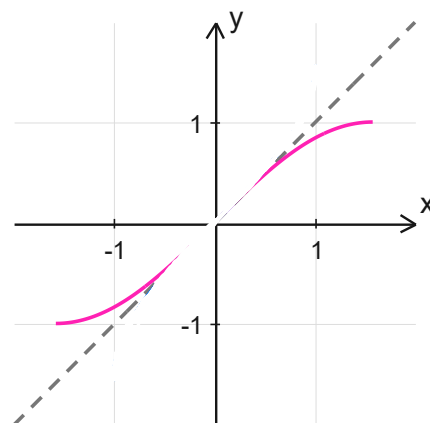
Bsp. 5: Sinus

Sinus trifft denselben -Wert

Wir nehmen deshalb nur das Stück $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



Bei der Umkehrfunktion tauschen

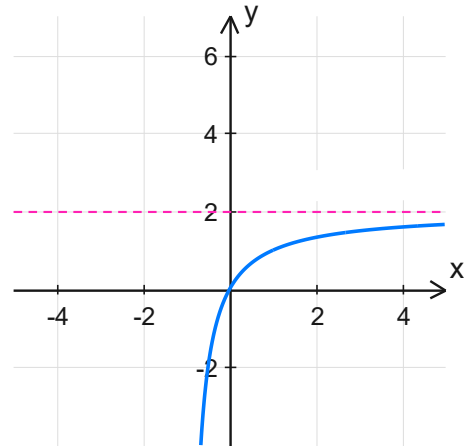
und

die

Asymptoten

Die Asymptote zur Funktion erfüllt folgende Bedingung:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\quad) =$$



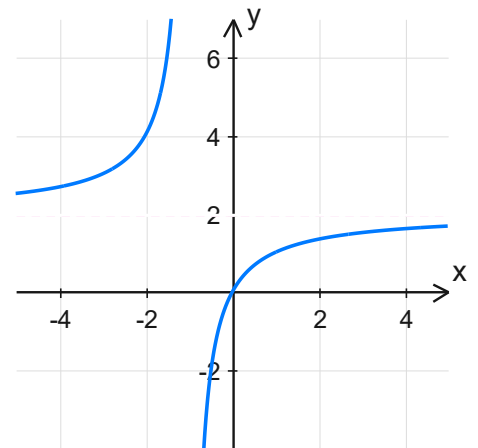
Waagerechte Asymptote

Geht gegen die Zahl , ist die Asymptote.

Bsp. 1

$$f(x) = \frac{2x}{x+1} =$$

Der Bruch geht gegen

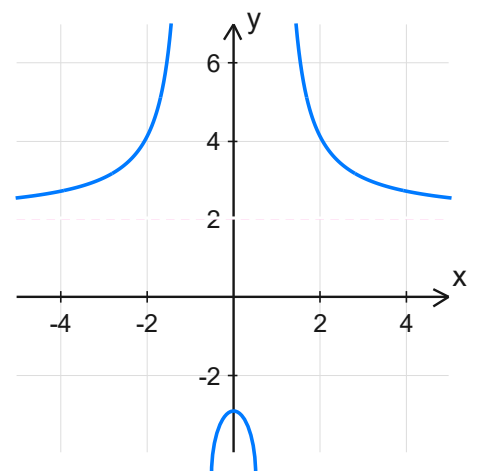


Bsp. 2

Für grosse $|x|$ (also $x \neq 0$):

$$\frac{4x^2 + 3}{2x^2 - 1} = \underline{\hspace{2cm}} \rightarrow \underline{\hspace{2cm}} =$$

Durch die Potenz : hier
Für und kommt wieder



Senkrechte Asymptote

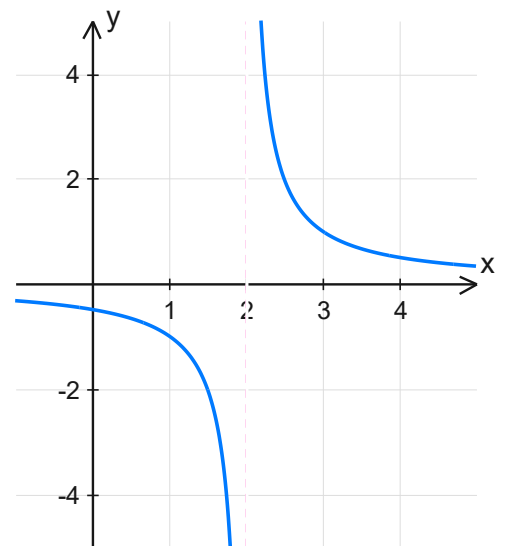
Wenn $f(x)$ bei $x =$ nach oder läuft, ist eine Asymptote.

Bsp. 1

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$x \rightarrow \quad : f(x) \rightarrow$$

$$x \rightarrow \quad : f(x) \rightarrow$$



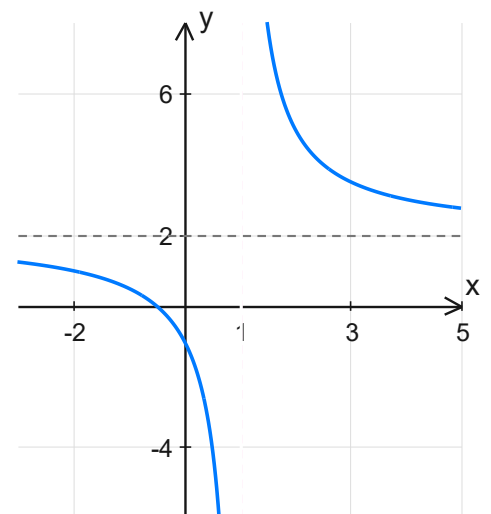
Asymptote: .

Bsp. 2

$$g(x) = \frac{2x+1}{x-1} =$$

$$x \rightarrow \quad : g(x) \rightarrow$$

$$x \rightarrow \quad : g(x) \rightarrow$$



Asymptote:

WICHTIG: reicht nicht! Erst Kürzen
Sonst kann es auch nur sein (wie auf Seite).

Schiefe Asymptote

Bei Brüchen hilft

Zählergrad = Nennergrad →

Der Restbruch soll gegen ∞ gehen.
Gerade.

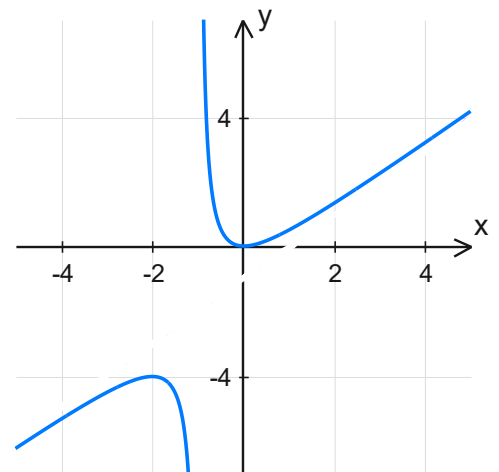
Bsp. 1: Schiefe Gerade $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

$$x^2 : (x+1) =$$
$$\underline{-(\quad)}$$

$$\underline{-(\quad)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\quad \right) =$$

$$g(x) =$$



Bsp. 2: Auch eine Parabel geht $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 5}{x-1}$

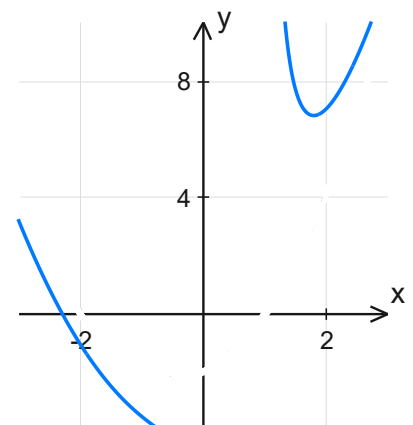
$$(x^3 - 3x + 5) : (x - 1) =$$
$$\underline{-(\quad)}$$

$$\underline{-(\quad)}$$

$$\underline{-(\quad)}$$

Rest = ∞ → Restbruch geht gegen

$$g(x) =$$



Tipps zur Serie 3

Aufgabe 1

Vergleiche jeden Graphen mit f_1 .

Was hat sich geändert: Lage, Breite, Höhe oder Vorzeichen?

Änderung im Argument $\rightarrow$ x-Richtung.

Änderung ausserhalb von $f \rightarrow$ y-Richtung.

Aufgabe 2

Bei injektiv und surjektiv die Bereiche immer mitlesen.

$$|x| = |-x| \Rightarrow \text{auf } \mathbb{R} \text{ nicht injektiv}$$

$$|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty) \text{ ist surjektiv}$$

Bild = tatsächlich erreichte Werte.

Zielbereich = die Menge rechts vom Pfeil.

Bei min und max: Welche Werte kommen wirklich heraus?

Bei Brüchen: zuerst vereinfachen und verbotene x-Werte behalten.

Aufgabe 3 / 4a

Asymptote gefunden? Den Abstand prüfen:

$$f(x) - g(x) \rightarrow 0$$