

Analysis 1 - Übung 2Recap:

- arithmetische Folge + Reihe

$$\triangleright \quad a_n = a_1 + d(n - 1) \qquad a_n = a_{n-1} + d$$

$$\triangleright \quad S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{2} \cdot n[a_1 + a_n] \text{ oder } S_n = \frac{1}{2} \cdot n[2a_1 + d(n - 1)]$$

- geometrische Folge + Reihe

$$\triangleright \quad \text{Explizit: } a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{Rekursiv: } a_n = a_{n-1} \cdot q$$

$$\triangleright \quad S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1(1 + q + q^2 + \dots + q^n) = a_1 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1(1 + q + q^2 + \dots) = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q}, \text{ falls } |q| < 1$$

WICHTIG: Für die

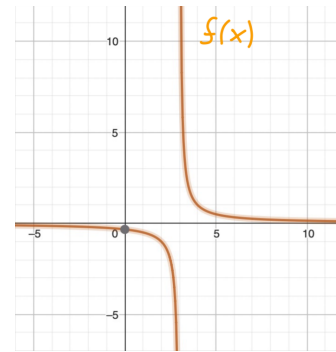
Darstellung braucht es einen

- konvergent
- konvergent
- konvergent
- divergent falls konvergent

## Harmonische Reihe

Bsp.

$$\bullet f(x) = \frac{1}{x-3} \quad \mathbb{D}(f) \in \mathbb{R} \quad \mathbb{W} \in \mathbb{R}$$



$$\bullet g(x) = \frac{x-15}{\sqrt{x}-4} \quad \mathbb{D}(f) \in \mathbb{R} \quad \mathbb{W} \in \mathbb{R}$$



• Thermometer →

Input:

Output:

$$\mathbb{W} =$$

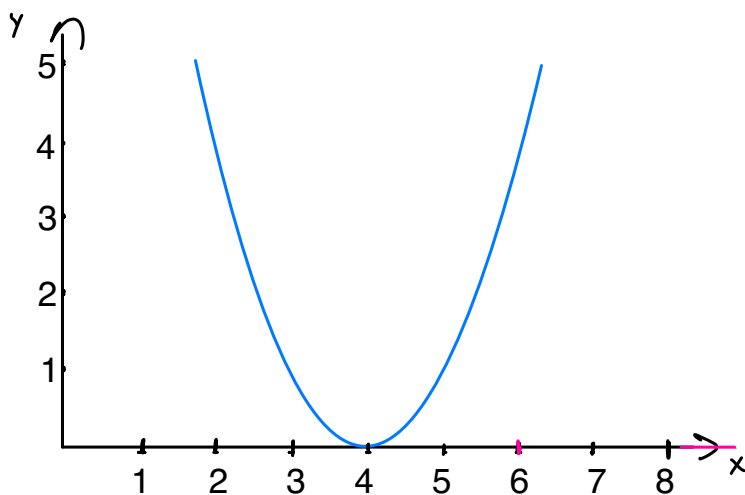
• Barometer: →

Input:

Output:

$$\mathbb{W} =$$

$$\bullet f(x) = (x-4)^2 \quad \mathbb{D} = [2, 6)$$



## Arten von Funktionen

1) Potenzfunktionen:

mit  $\in$

2) Polynom Funktionen:

mit

3) Rationale Funktionen:

4) Trigonometrische Funktionen:  $f(x) = \sin(x)$   $g(x) = \cos(x)$

5) Exponential-/  $f(x) =$   $=$

Logarithmusfunktionen:  $f(x) =$   $=$

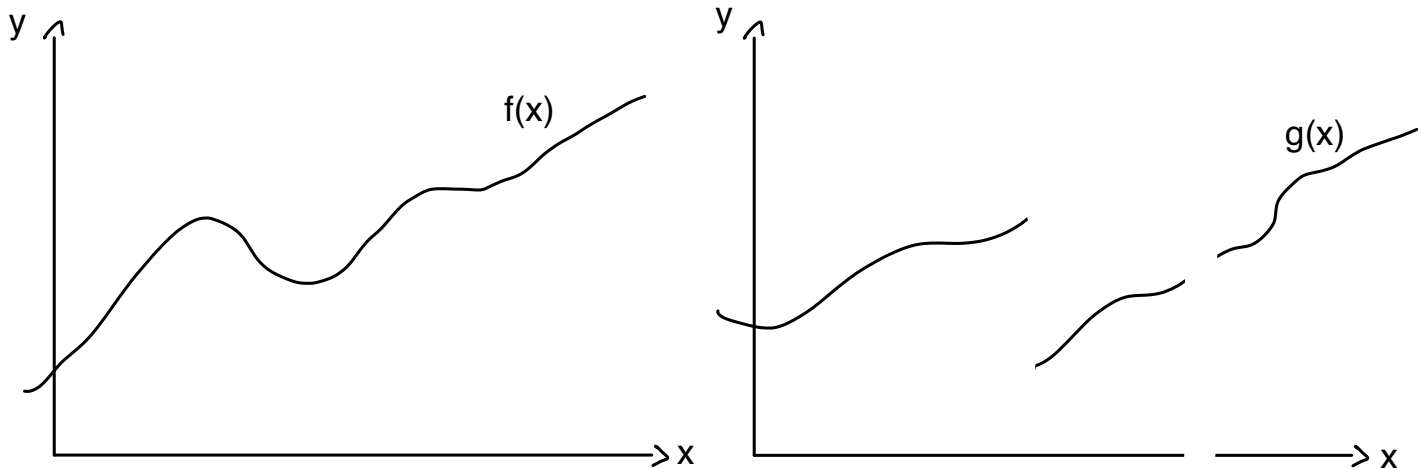
## Eigenschaften von Funktionen

1) Funktion:

Funktion:

2) (Strikt) monoton für alle  $x_1 < x_2$ :  $f(x_1) < f(x_2)$  (bzw.  $f(x_1) > f(x_2)$ )

(Strikt) monoton für alle  $x_1 < x_2$ :  $f(x_1) < f(x_2)$  (bzw.  $f(x_1) > f(x_2)$ )



Eine Funktion ist stetig, wenn man sie mit einem Strich zeichnen kann. (Kein Sprung)

→  $f(x)$  ist stetig,  $g(x)$  ist nicht stetig

→  $g(x)$  ist

• stetig in :

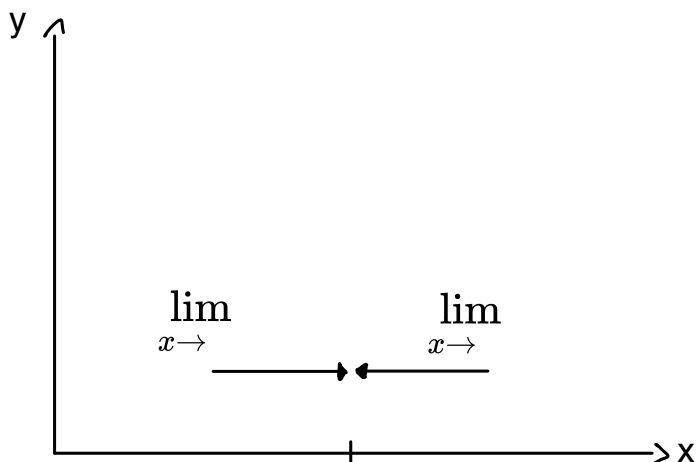
$$\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} g(x)$$

• nicht stetig in :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$$

## Grenzwerte von Funktionen (eine Auswahl von Methoden)

- Links- & Rechts-Grenzwerte und Betragsstriche



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{2|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{2(x-1)} = //$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{2|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{2(-1)(x-1)} = //$$

Diese Funktion ist (im Punkt  $x =$  )

- Wert einsetzen

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{\quad}{\quad} =$$

Oft resultieren aber undefinierte Ausdrücke  
 $\rightarrow 0/0, \infty/\infty, 0 \cdot \infty, \dots$

- Brüche Faktorisieren & Kürzen

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\quad}{\quad} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\quad}{\quad} =$$

- Brüche mit grösster Potenz kürzen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\quad}{\quad} =$$

“Durch die

Potenz teilen”

• Wurzeln erweitern

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+4} + 2}{\sqrt{x+4} + 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+4} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{0+4} + 2} = \frac{1}{4}$$

• Trigonometrische Funktionen ( sin, cos,...)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} =$$

Bsp.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(5x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x \cos(5x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x} \cdot 5 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(5x)} = 1 \cdot 5 \cdot 1 = 5$$

Bsp.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x})}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin(x)} \cdot 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin(x)} = 0$$

┌

$$A = \lim_{x \rightarrow 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} =$$



└

## Bernoulli L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \text{und} \lim_{x \rightarrow a} g(x) =$

oder

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \text{und} \lim_{x \rightarrow a} g(x) =$$

Bsp.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos(x) - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(5x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan(5x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sec^2(5x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} 5 \sec^2(5x) =$$

$$\tan(x)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

## Serie 2

**Abgabetermin für alle Aufgaben:** Dienstag, um 14:00 Uhr, online.

**Bemerkung:** Wir haben einige Aufgaben in den Serien gekennzeichnet: Mit einem Stern (★) sind Aufgaben gekennzeichnet, die über den Prüfungsstoff hinausgehen, aber dennoch interessant sind. Mit einem Herz (♥) sind die (Teil-) Aufgaben gekennzeichnet, die besonders wichtig sind. Um den Anschluss in der Vorlesung nicht zu verlieren, sollten Sie zumindest diese Aufgaben bearbeiten.

---

Diese Woche schauen wir uns die Grundlagen von Funktionen etwas genauer an. Wir haben noch nicht alle gewohnten Werkzeuge aus der Differentialrechnung, aber trotzdem können wir in Aufgabe 1 schon einige Eigenschaften bestimmen und in Aufgabe 3 eine etwas spezieller definierte Funktion betrachten. In Aufgabe 2 üben wir ausserdem, wie sich Graphen von Funktionen unter Transformationen verschieben, strecken, quetschen, usw. Schliesslich rufen wir uns in Aufgabe 4 in Erinnerung, wie das mit Cosinus und Sinus nochmal ging – Und dass man geometrisch da echt viel herausholen kann!

1. (♥) Gegeben sei die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - x^2 - 2x}. \quad \rightarrow \text{Funktion dritter Ordnung}$$

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen von  $f$ . Für welche Werte von  $x$  ist die Funktion  $f$  positiv? Für welche negativ? Skizzieren Sie den Graph  $\Gamma(f)$ .

Hinweis: für den Graph können Sie z.B. das Bild ausgewählter Werte im Definitionsbereich berechnen und dann die Punkte miteinander verbinden. Was passiert mit der Funktion  $f$  in Umgebungen der Nullstellen des Nenners?

2. Sei  $x \in \mathbb{R}$  eine reelle Zahl. Gegeben sei das Polynom

$$p_x(y) = y^3 + 4y^2 + xy.$$

Wir definieren eine Funktion  $f$  durch

$$f : x \mapsto \text{kleinste Nullstelle von } p_x(y).$$

$\rightarrow$  Nullstellen  $p(y)$  berechnen  
 $\hookrightarrow$  Überlege für welche  $x$  welche  
Nullstelle am kleinsten ist  
 $\hookrightarrow$  evtl. Fallunterscheidung

Beschreiben Sie  $f$  durch eine Formel und skizzieren Sie den Graphen von  $f$ . Ist  $f$  stetig? Gibt es ein  $x$  mit  $f(x) = -\pi$ ? (Sie müssen  $x$  dazu nicht berechnen!)

3. Es sei  $A := (x, y)$  ein Punkt auf dem Einheitskreis, d.h.  $x^2 + y^2 = 1$ . Weiter sei  $B := (0, 0)$  der Ursprung des Koordinatensystems und  $C := (x, 0)$  der Punkt auf der  $x$ -Achse mit derselben  $x$ -Koordinate wie  $A$ . Es bezeichne  $ABC$  das Dreieck mit den Eckpunkten  $A, B$  und  $C$  (siehe die Figur weiter unten). Wir definieren  $\alpha \in [0, 2\pi]$  als die Länge des Kreisbogens von Punkt  $(1, 0)$  bis zum Punkt  $A$ , wenn man den Einheitskreis im Gegenuhrzeigersinn durchläuft.

- (a) (♥) Skizzieren Sie das Dreieck  $ABC$  im Spezialfall  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  und berechnen Sie die Länge der Strecke  $\overline{AC}$  in diesem Spezialfall. Was ist somit  $\sin(\frac{\pi}{4})$ ? Und  $\cos(\frac{\pi}{4})$ ?  $\rightarrow$  Satz des Pythagoras  
 (b) (♥) Zeigen Sie unter Verwendung der Beziehungen im Dreieck  $ABC$ :  $\hookrightarrow$  Einheitskreis

$$\cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

für alle  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Wieso gilt somit

Rechtwinkliges Dreieck zeichnen

$$-\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

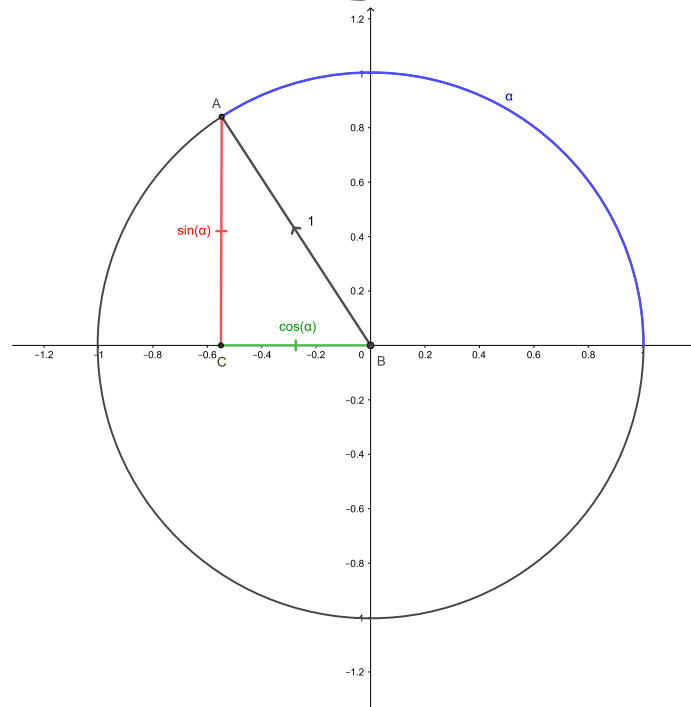
Mit Summe der Winkel arbeiten

für alle  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ? (Bemerkung: Die hergeleiteten Beziehungen zwischen  $\sin$  und  $\cos$  in dieser Teilaufgabe gelten sogar für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$ ).

- (c) (♥) Zeigen Sie unter Verwendung der Beziehungen im Dreieck  $ABC$ :

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha),$$

für alle  $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ . (Bemerkung: Die hergeleitete Beziehung in dieser Teilaufgabe gilt sogar für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$ ). - Mit Zeichnung arbeiten, Ds von  $\alpha$  nicht vergessen



- (d) Es sei  $\arctan$  die Umkehrfunktion von  $\tan$ . Zeigen Sie die Gleichheit

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

für alle  $x \geq 0$  mit Hilfe eines geeigneten Dreiecks  $ABC$ . (Es ist sinnvoll ein Dreieck zu verwenden bei dem eine Seite die Länge 1 hat).